



Roland Macedo

Licenciado

Optimização Estrutural na Análise Não Linear dos Modelos de Escoras e Tirantes

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Civil - Perfil Estruturas

Orientador: Doutor Corneliu Cismasiu, FCT-UNL

Júri:

Presidente: Doutor Luís Canhoto Neves
Arguente: Doutor António Manuel Pinho Ramos
Vogal: Doutor Corneliu Cismasiu



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Dezembro de 2011

"Always walk through life as if you have something new to learn and you will."
Vernon Howard

“Copyright” Roland Macedo, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Para a realização desta dissertação não poderia deixar de exprimir o meu profundo agradecimento:

Ao meu orientador, o Professor Doutor Corneliu Cismasiu, quer pela oportunidade e disponibilidade prestada, quer pelo incentivo, paciência e conhecimentos transmitidos ao longo desta dissertação.

A todos os professores do Departamento de Engenharia Civil que de forma directa ou indirecta contribuíram ao longo da minha vida académica. Não poderia deixar de agradecer à Professora Doutora Maria Teresa Grilo Santana pela amizade, apoio e à oportunidade concedida durante esta aventura académica.

Aos meus amigos e colegas, que durante a elaboração deste trabalho, constantemente me ofereceram apoio de inimaginável valor. A todos gostaria de exprimir um muito obrigado, em particular aqueles com quem convivi próximo nesta etapa inesquecível da minha vida.

Por último, disponho o meu mais sincero e profundo agradecimento à minha família, em particular à minha mãe e ao meu tio, cuja importância ultrapassa, em grande escala, algo que eu seja capaz de exprimir.

Resumo

Em peças de betão armado, para zonas de descontinuidade geométrica, é corrente adoptar o dimensionamento através do modelo de escoras e tirantes. A metodologia do modelo de escoras e tirantes consiste, resumidamente, na condensação de todas as tensões de compressão e tracção em elementos barra sujeitos a esforços axiais, sendo estas ligadas entre si através de nós. No entanto, através desta metodologia, é possível adoptar vários modelos, onde o melhor modelo é aquele que possui menor energia de deformação.

A adopção de análises considerando as não linearidades físicas e geométricas são cada vez mais comuns devido à evolução de recursos computacionais e da criação de novos modelos mais próximos da realidade. Neste estudo, foram modeladas treliças com a geometria de um modelo de escoras e tirantes, onde se considera as propriedades não lineares dos materiais. As soluções obtidas destes modelos numéricos permitem obter um historial do comportamento estrutural, desde do início da aplicação da carga até ao colapso da estrutura. Como base de comparação e de validação, as modelações numéricas são comparadas por modelos experimentais realizados por Filho [10].

Neste trabalho, procura-se determinar um modelo de escoras e tirantes “ótimo” através de ferramentas de optimização estrutural incluídas no programa *Ansys*. Uma peça de betão armado, típica de uma zona de descontinuidade geométrica, é submetida a uma optimização topológica e paramétrica, afim de obter o modelo de escoras e tirantes optimizado. Desenvolvido o modelo numérico com a forma do modelo de escoras e tirantes optimizado, realiza-se uma análise considerando as propriedades não lineares dos materiais. Por fim, os resultados obtidos são comparados com os resultados experimentais de Filho.

Palavras chave:

Modelos de escoras e tirantes; Análise não linear; Optimização topológica; *Ansys*; Betão armado;

Abstract

In parts of reinforced concrete, for geometric discontinuity areas, it is commonly adopted strut-and-tie model design. The methodology of strut-and-tie model consists, in short, in condensing all compressive and tensile stress into elements subjected to axial forces, which are link together through nodes. However, through this methodology, it is possible to adopt various models, where the best model is the one that has lower strain energy.

The analysis considering the adoption of physical and geometrical nonlinearities are increasing due to the evolution of computing resources and the creation of new models closer to reality. In this study, were modelled trusses with the geometry of the strut-and-tie models, which considers the materials nonlinear properties. The solutions obtained from these numerical models allow to obtain a history of structural behaviour, from the beginning of load application to the collapse of the structure. With a basis for comparison and benchmark, the numerical models are compared with experimental models performed by the Filho.

In this work, we seek to determine an “optimal” strut-and-tie model through structural optimization tools included in Ansys software. An element of reinforced concrete, typical of a geometric discontinuity zone, is subjected to a topological and parametric optimization in order to get the optimal strut-and-tie model. Developed the numerical model with the shape of the optimized strut-and-tie model, an analysis was carried out considering the nonlinear properties of materials. Finally, the results obtained are compared with experimental results by Filho.

Keywords:

Strut-and-tie models; Non-linear analysis; Topological optimization; Ansys; Reinforced concrete;

Índice de Matérias

Copyright	i
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Enquadramento do Tema	1
1.2 Objectivos	1
1.3 Organização da Dissertação	2
2 Revisão Bibliográfica	3
2.1 Introdução	3
2.2 Fundamentos dos Modelos de Escoras e Tirantes	3
2.2.1 Enquadramento da Teoria da Plasticidade	3
2.2.2 Modelo de Escoras e Tirantes	4
2.2.3 Dimensionamento dos Tirantes	8
2.2.4 Dimensionamento de Escoras e Nós	8
2.3 Análise Não Linear	12
2.3.1 Ansys	13
2.4 Propriedades dos Materiais	13
2.4.1 Betão à Compressão	13
2.4.2 Aço	15
2.4.3 Efeito <i>Tension-stiffening</i>	16
2.5 Fundamentos de Optimização Estrutural	18
2.5.1 Introdução à Optimização Estrutural	18
2.5.2 Tipos de Optimização Estrutural	19
2.6 Optimização Estrutural em Modelos de Escoras e Tirantes	22
2.6.1 Geração Automática em Modelos de Escoras e Tirantes	22

3	Modelação Numérica e Validação	25
3.1	Introdução	25
3.2	Exemplo de Validação	28
3.2.1	Modelo MB1ee	29
3.2.2	Modelo MB2ee	41
3.2.3	Modelo MB3ee	46
4	Caso de Estudo de Optimização	53
4.1	Introdução	53
4.2	Optimização Topológica	53
4.3	Modelo Numérico da Trelça Optimizada	56
4.3.1	Análise Não Linear do Modelo Optimizado	58
5	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	63
5.1	Conclusões	63
5.2	Desenvolvimentos Futuros	64
	Bibliografia	67
A	Pormenorização das Armaduras dos Modelos Experimentais	71
B	Script de Optimização Paramétrica	73
C	Script para Modelo Não Linear	79

Índice de Figuras

2.1	Relação carga-deformação prevista de consola curta modelada, através de três tipos de modelos de escoras e tirantes diferentes.	5
2.2	Tipos de regiões de Bernoulli e de descontinuidade.	6
2.3	Método de caminho de carga e modelo de escoras e tirantes.	7
2.4	Tipos de campos de tensão de compressão.	9
2.5	Tipos de escoras numa região D.	10
2.6	Tipos de nós na estrutura nós concentrados (I) e nós contínuos (II).	11
2.7	Tipos de nós.	11
2.8	Esquema geral do processo iterativo do método Newton-Raphson	14
2.9	Relação constitutiva de betão à compressão	14
2.10	Modelos do aço	15
2.11	Relações constitutivas para o aço em armaduras adaptado EC2.	16
2.12	Relação constitutiva do aço com efeito de <i>tension-stiffening</i>	17
2.13	Relação constitutiva do betão à tracção com efeito de <i>tension-stiffening</i>	17
2.14	Optimização da estrutura de Michell.	18
2.15	Três tipos de optimização estrutural.	20
2.16	Procedimento para chegar à solução óptima.	22
2.17	Optimização topológica de o pilar de ponte estudado por Liang <i>et al.</i>	23
2.18	Exemplo de geração automática de um modelo de escoras e tirantes de uma parede viga: a) treliça básica; b) 3ª iteração da OT; c) 6ª iteração da OT; e d) OT na 30ª iteração.	24
3.1	Modelos experimentais PA e PB.	26
3.2	Análise elástica para uma carga de 100 kN - tensões normais segundo as direcções x, tensões normais segundo as direcções y e tensões tangenciais segundo xy.	27
3.3	Modelos básicos de transmissão da carga.	27
3.4	Esquema geral do ensaio.	29
3.5	Modelo de treliça do modelo experimental MB1ee e esforços axiais do cálculo estático.	30
3.6	Elemento <i>BEAM189</i>	30
3.7	Elemento <i>COMBIN7</i>	31
3.8	Elemento <i>LINK180</i>	31
3.9	Relação tensão-deformação do betão, do aço e de betão armado.	34
3.10	Modelo numérico da treliça para MB1ee e localização dos nós.	35
3.11	Relação força-deslocamento dos modelos MB1ee-EXP e MB1ee-MEF.	36

3.12	Evolução da fendilhação do modelo MB1ee-MEF.	37
3.13	Cronograma da fendilhação nos modelos MB1ee-EXP e MB1ee-MEF. . . .	39
3.14	Modelo de treliça do modelo experimental MB2ee e esforços axiais do cálculo estático.	41
3.15	Modelo de treliça numérica para modelo MB2ee.	42
3.16	Diagrama força-deslocamento dos modelos MB2ee-EXP e MB2ee-MEF. . .	43
3.17	Evolução da fendilhação do modelo MB2ee-MEF.	44
3.18	Cronograma da fendilhação nos modelos MB2ee-EXP e MB2ee-MEF. . . .	45
3.19	Modelo de treliça do modelo experimental MB3ee e esforços axiais do cálculo estático.	46
3.20	Modelo de treliça numérico para modelo MB3ee.	47
3.21	Diagrama força-deslocamento dos modelos MB3ee-EXP e MB3ee-MEF. . .	47
3.22	Evolução da fendilhação do modelo MB3ee-MEF.	49
3.23	Cronograma da fendilhação nos modelos MB3ee-EXP e MB3ee-MEF. . . .	50
4.1	Elemento <i>PLANE82</i>	53
4.2	Definição da malha com dimensão do elemento de 2.5 cm.	54
4.3	Modelos otimizados.	55
4.4	Treliça desenvolvida após processo de optimização topológica.	56
4.5	Evolução da optimização paramétrica.	57
4.6	Modelo de treliça optimizado (MB-OPT) e esforços axiais do cálculo estático. .	58
4.7	Diagrama força-deslocamento do modelo MB-OPT.	59
4.8	Evolução da fendilhação do modelo MB-OPT.	61
A.1	Pormenorização das armaduras do modelo MB1ee-EXP	71
A.2	Pormenorização das armaduras do modelo MB2ee-EXP	72
A.3	Pormenorização das armaduras do modelo MB3ee-EXP	72

Índice de Tabelas

3.1	Valores de resistência média à compressão e à tracção dos betões.	28
3.2	Valores de resistência média dos aços (2. ^a fase).	28
3.3	Propriedades do aço considerado para as modelações numéricas.	32
3.4	Armaduras do modelo MB1ee experimental.	32
3.5	Propriedades geométricas e materiais do tirante 1.	33
3.6	Valores experimentais e numéricos do modelo MB1ee correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.	40
3.7	Armaduras do modelo MB2ee-EXP.	42
3.8	Valores experimentais e numéricos do modelo MB2ee correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.	42
3.9	Armaduras do modelo MB3ee-EXP.	47
3.10	Valores experimentais e numéricos do modelo MB3ee correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.	48
4.1	Parâmetros adoptados para executar OT.	55
4.2	Parâmetros adoptados para executar optimização paramétrica.	57
4.3	Valores experimentais e numéricos do modelo MB-OPT correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.	60

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Abreviaturas

EC2 Eurocódigo 2

MEF Método dos Elementos Finitos

MC90 Model Code 1990

MET Modelo Escoras e Tirantes

OP Optimização Paramétrica

OT Optimização Topológica

Siglas

APDL Ansys Parametric Design Language

MISO Multilinear Isotropic Hardening

ESO Evolutionary Structural Optimization

Símbolos

Letras maiúsculas latinas

A_{req} área de armadura requerida

A_s área da armadura

A_b força do betão

E módulo de elasticidade

E_c módulo de elasticidade do betão

E_{cm} módulo de elasticidade secante do betão

E_s módulo de elasticidade do aço

F_a força de tracção do aço

F_a força de tracção do betão

F_i força do elemento i

F_t força do tirante

P_{ed} valor de cálculo da carga de dimensionamento

P_u valor de carga última

Letras minúsculas latinas

f_{cd} valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão

f_{ck} valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias

f_{cm} valor médio da tensão de rotura do betão à compressão

f_{ctm} valor médio da tensão de rotura do betão à tracção simples

f_s tensão do aço

f_t tensão máxima no aço

f_{tk} valor característico da tensão de rotura à tracção do aço das armaduras para betão armado

f_y tensão de cedência à tracção do aço das armaduras para betão armado

f_{yd} valor de cálculo da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras de betão armado

k coeficiente/factor

l_i comprimento do elemento i

v factor de eficácia

Letras minúsculas gregas

$\delta_{máx}$ deslocamento máximo

ε extensão

ε_a extensão do aço

ε_{ba} extensão do betão armado

ε_{bt} extensão do betão à tracção

ε_c extensão do betão à compressão

ε_{cl} extensão do betão à compressão correspondente à tensão máxima f_{cm}

ε_{cr} extensão de fendilhação

ε_{cu}	extensão última do betão à compressão
ε_{el}^{eq}	extensão elástica equivalente
ε_{mi}	extensão média do elemento i
ε_{pl}^{eq}	extensão plástica equivalente
ε_s	extensão do aço
ε_{sh}	extensão de endurecimento do aço
ε_{su}	extensão total no aço para a força máxima
ε_{sy}	extensão de cedência do aço
ε_{total}^{eq}	extensão total equivalente
ε_u	extensão do aço da armadura para betão armado correspondente à tensão máxima
ν_a	coeficiente de Poisson do aço
ν_b	coeficiente de Poisson do betão
σ	tensão
σ_a	tensão axial do aço
σ_{ba}	tensão axial do betão armado
σ_{bt}	tensão axial do betão à tracção

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e Enquadramento do Tema

Actualmente, não é muito habitual um engenheiro recorrer a uma análise não linear para o dimensionamento estrutural. A sua complexidade e os elevados consumos de recursos computacionais levam o engenheiro a fazer uma abordagem diferente, inserindo coeficientes de comportamento na modelação, para ter em conta a não linearidade física do material. Esta abordagem torna-se, de certo modo, numa análise simples, com resultados próximos da solução exacta, sendo muito comum no dimensionamento estrutural de betão armado. No entanto, sempre que possível, tenta-se desenvolver e validar novas metodologias de modelos numéricos, tomando em conta a não linearidade física e geométrica. Estes desenvolvimentos permitem economizar um conjunto de recursos, principalmente tempo e custos.

No dimensionamento de betão armado, poderão ser adoptadas, em certos casos, metodologias diferentes para o mesmo problema. Os modelos de escoras e tirantes (MET), designação inglesa de *strut-and-tie models*, é uma das metodologias para o dimensionamento de betão armado e resume-se na condensação de todas as tensões de compressão e tracção em elementos barra sujeitos a esforços axiais, sendo que estas barras são ligadas entre si por nós [14].

Este método permite compreender melhor o comportamento de uma estrutura de betão armado, visto que, durante o processo, é elaborado um “esqueleto” interno da estrutura [16]. O método permite gerar vários modelos admissíveis para o mesmo problema, desde que seja satisfeito o equilíbrio entre os nós e a sua segurança para os estados limite últimos e de serviço. O estudo de diversas peças de betão armado utilizando modelos de escoras e tirantes permitiu que a comunidade científica ganhasse, ao longo do tempo, alguma experiência. Mesmo assim, em face de geometrias novas, mais complexas, subsiste a pergunta: qual será o melhor MET adoptado?

1.2 Objectivos

A presente dissertação tem dois objectivos principais. O primeiro objectivo pretende demonstrar que é possível obter resultados satisfatórios, através da modelação de

treliças provenientes do MET, mesmo no caso de uma análise não linear. Os resultados obtidos serão comparados com modelos experimentais realizados por Filho [10]. Uma vez validado este conjunto de modelações, avança-se para uma segunda fase.

Nesta segunda fase, o principal objectivo consiste em determinar um modelo de escoras e tirantes óptimo. Para tal, serão usadas ferramentas de optimização incluídas no programa *Ansys*, nomeadamente, optimização topológica e paramétrica. O resultado obtido da optimização topológica permitirá perceber quais as zonas da estrutura que são mais eficientes para resistir à carga aplicada. Indirectamente, este método demonstra também qual o caminho que a carga aplicada segue no interior da estrutura. Neste sentido, utilizando os resultados deste processo de optimização topológica, desenvolve-se uma treliça, que será o MET óptimo. A treliça “ótima” desenvolvida terá de ser submetida a uma optimização paramétrica, pois pretende-se determinar os esforços de uma estrutura hiperestática. Deste modo, obtém-se uma melhor distribuição dos esforços internos da estrutura. Concluída a optimização paramétrica, realiza-se uma análise não linear, onde esta será comparada com os modelos experimentais de Filho. Assim, verifica-se que esta treliça “ótima” é mais eficiente que os outros modelos analisados anteriormente.

1.3 Organização da Dissertação

A presente dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos. Além deste capítulo introdutório, apresenta-se, de seguida, uma breve descrição dos capítulos desenvolvidos.

Capítulo 2. Neste capítulo, faz-se uma abordagem dos conhecimentos teóricos da revisão bibliográfica feita para esta dissertação.

Capítulo 3. Através da investigação de Filho, onde foram realizados ensaios experimentais com recurso aos modelos de escoras e tirantes, são realizados modelos numéricos de treliça no programa *Ansys*. Concluída a concepção destes, recorre-se às análises não lineares, em que os resultados obtidos serão comparados com os resultados experimentais dos modelos de Filho. Desta forma, ir-se-á validar os modelos numéricos desenvolvidos.

Capítulo 4. Neste capítulo, desenvolve-se um modelo “ótimo” recorrendo a uma optimização topológica. Depois de optimizado, realiza-se uma análise não linear com o modelo “ótimo” obtido e estabelece-se uma comparação com todos os modelos estudados no capítulo anterior.

Capítulo 5. Por fim, são referidas as conclusões principais a retirar do estudo efectuado, assim como alguns desenvolvimentos futuros, também através deste estudo.

NOTA: A presente dissertação não segue o novo acordo ortográfico. Para a designação da separação decimal, foi usada a notação anglo-saxónica.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Este capítulo tem como objectivo expor os conhecimentos necessários para entender o desenvolvimento do estudo realizado. Como referido na secção 1.1, o uso de betão armado em estruturas é actualmente bastante recorrente. Existem várias metodologias para o dimensionamento de uma estrutura de betão armado sendo uma delas o método das escoras e tirantes. Este método foi praticamente desenvolvido por Schlaich *et al.* [14] onde a teoria da plasticidade é um dos fundamentos principais usados nas escoras e tirantes. Note-se, que esta teoria encontra-se dividida pelo teorema da região inferior, teorema da região superior e teorema da unicidade, estes serão vistos mais à frente.

O mais corrente no dimensionamento é o uso de análises lineares, pois acaba por ser simples, rápido, eficaz e, de certo modo prático, para qualquer projectista. Com o desenvolvimento da tecnologia na área da computação, é possível realizar análises de modelos numéricos complexos considerando a não linearidade física ou geométrica. É certo que há modelações mais realistas, mas, quando analisadas, verifica-se que exigem elevados recursos computacionais.

No campo das análises não lineares, existem duas abordagens fundamentais. É possível adoptar uma análise tendo em conta a não linearidade geométrica da estrutura, assumindo a teoria dos pequenos deslocamentos ou a teoria dos grandes deslocamentos, ou uma análise em que se tem em conta a não linearidade física, sendo que os materiais possuem comportamento não linear.

2.2 Fundamentos dos Modelos de Escoras e Tirantes

2.2.1 Enquadramento da Teoria da Plasticidade

A partir da teoria da plasticidade, é possível determinar a capacidade resistente estática para estruturas de betão armado. Uma vez que são elaborados modelos, estes só podem demonstrar resultados úteis, se forem testados experimentalmente e, através da experiência prática [19]. Na teoria da plasticidade encontram-se três teoremas fundamentais: teorema da região inferior (teorema estático), teorema do limite superior

(teorema cinemático) e teorema da unicidade. O teorema estático refere, segundo um conjunto de forças exteriores aplicadas num determinado corpo, estas, encontram-se em equilíbrio com as tensões internas e, verifica-se que em nenhum ponto não é violado a condição de cedência, sendo a carga aplicada menor ou igual à carga de colapso. Para o teorema cinemático, é preciso desenvolver um adequado mecanismo de rotura cinematicamente admissível, desde que satisfaça as condições de fronteira e as condições de compatibilidade das deformações. O teorema da unicidade considera, para uma determinada carga externa, seja possível verificar os teoremas estático e cinemático, então essa carga é necessariamente uma carga exacta [11]. A resistência última de um determinado MET fica garantida através do teorema estático, deste modo, é possível determinar um valor próximo da carga exacta de colapso [14].

Uma condição necessária para a validade dos teoremas referidos é que as forças internas possam ser redistribuídas durante o carregamento até ao colapso. Logo, materiais como aço e betão necessitam de ter alguma ductilidade [16, 19]. Actualmente, já existe documentação regulamentar no que se refere às propriedades dos materiais como betão e aço EC2 [1] e CEB FIB MC90 [6]. Estes serão revistos mais à frente neste capítulo.

2.2.2 Modelo de Escoras e Tirantes

O MET serve para o dimensionamento de betão armado de uma dada estrutura, quando o princípio de Bernoulli não é válido. Ao mesmo tempo, é possível realizar a verificação da segurança para os estados limite últimos e pormenorizar os elementos de betão armado. Ao longo dos anos, tem havido um acréscimo da potencialidade desta metodologia [21].

O MET consiste, resumidamente, em elaborar uma treliça “interna” na peça em estudo, onde, nas zonas onde existem tensões de compressão passam a existir elementos de barra comprimidos, sendo que se verifica o contrário em zonas de tensões de tracção. Ensaio experimentais demonstram que a estrutura na proximidade do colapso se assemelha a uma estrutura articulada. Deste modo, o MET é considerado adequado na análise do comportamento de meios contínuos de betão armado aos estados limites últimos [20].

No entanto, não existe um MET único para um dado problema. Vários modelos de escoras e tirantes admissíveis podem ser desenvolvidos para cada caso de carga, desde que a treliça adoptada se encontre em equilíbrio com as condições de fronteira e as tensões do MET estejam dentro dos limites aceitáveis. Em teoria, o teorema da região inferior define que a capacidade obtida em todos os campos de tensão estaticamente admissível é inferior ou igual à carga do colapso. Contudo, na prática, a capacidade resistente pode ser sobredimensionada, devido ao limite da ductilidade do betão estrutural. Deste modo, isso limita o número de soluções viáveis para cada projecto e sugere que o MET viável deve ser aquele que melhor condição tenha para corresponder à tensão instalada e exija uma redistribuição pequena das cargas antes do colapso. O MET aproxima-se do fluxo de tensões principais na estrutura onde estas estão em equilíbrio com as forças de fronteira. Assim, o modelo pode ser

interpretado como um esquema do fluxo de forças internas da estrutura. Através desta consideração, um MET viável pode ser identificado ao examinar-se o caminho de carga na estrutura [16].

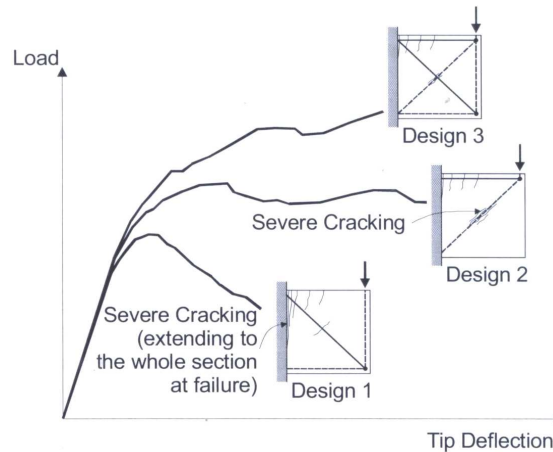


Figura 2.1: Relação carga-deformação prevista de consola curta modelada, através de três tipos de modelos de escoras e tirantes diferentes [2].

A figura 2.1 realça a importância do MET a adoptar para uma dada estrutura. Observa-se o comportamento estrutural de uma consola curta sujeita a uma carga na sua extremidade. Através de uma análise não linear com elementos finitos, podemos verificar três tipos de comportamentos diferentes para estruturas dimensionadas para a mesma carga de dimensionamento.

Observa-se que existe uma grande diferença na resposta e na capacidade resistente para vários modelos de escoras e tirantes. O primeiro modelo (*Design 1*) apresenta piores resultados no que diz respeito à capacidade resistente e deformação. Tal deve-se ao facto de o MET adoptado não ser compatível com as condições de extensão, permitindo a fendilhação excessiva na região superior perto do apoio, após a cedência do tirante na diagonal. Não havendo nenhuma possibilidade de redistribuição da carga, a estrutura colapsa imediatamente. No segundo modelo (*Design 2*), observa-se uma melhoria no seu comportamento, onde imediatamente depois da cedência do tirante horizontal ocorre uma redistribuição da carga antes do seu colapso. O último modelo (*Design 3*) apresenta os melhores resultados no que diz respeito à carga última e deformada final. O carregamento resiste através da acção do tirante e da escora que se encontram na diagonal e, quando surge a cedência do tirante na horizontal, há uma redistribuição de carga para estes elementos [9].

Regiões B e D

No dimensionamento de estruturas, as estruturas podem ser divididas por regiões contínuas e descontínuas. Regiões B (onde B surge de Bernoulli), são regiões que são contínuas e é válida a hipótese de Bernoulli, ou seja, existe uma distribuição linear das deformações ao longo da secção transversal. As regiões restantes, onde se verifica que

não é válida a hipótese de Bernoulli, são designadas por regiões D (onde D significa descontinuidade ou distúrbio), neste tipo de regiões, existe uma distribuição não linear das deformações. Deste modo, é necessária a utilização alternativa de dimensionamento e para tal, dever-se-á inicialmente por dividir a estruturas por regiões B e D. Um critério aceite para delimitar as zonas B e D baseia-se no princípio de Saint-Venant, onde este admite uma dimensão do comprimento h no qual se dá a regularização das tensões, esta dimensão permite definir então as dimensões de uma região D [14]. Refere-se que a delimitação da estrutura em regiões B e D não é um aspecto decisivo na modelação, mas tornar-se-á vantajoso para o desenvolvimento do MET, uma vez que permite compreender estruturalmente como se prossegue a transmissão das forças internas.

Conforme se pode observar na figura 2.2, as zonas D são zonas que sofrem alguma aplicação de cargas concentradas ou perturbações geométricas (cantos, aberturas, apoios).

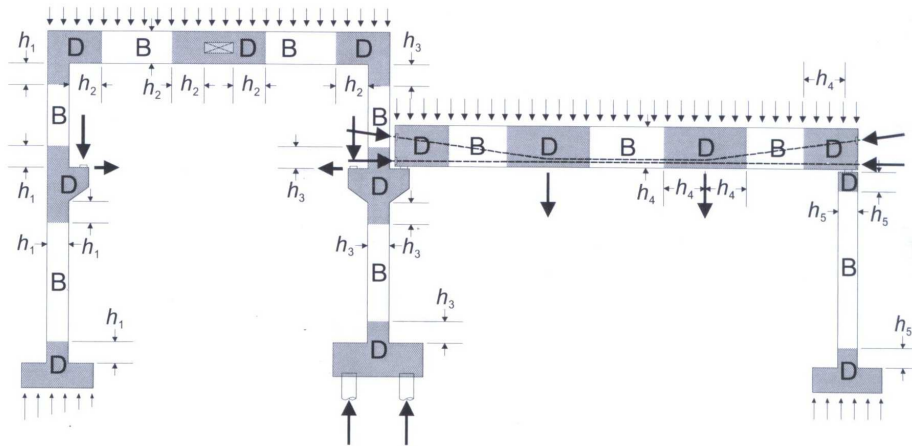


Figura 2.2: Tipos de regiões de Bernoulli e de descontinuidade [9].

Desenvolvimento dos Modelos de Treliza

Apresentam-se, resumidamente, algumas regras gerais para desenvolver o MET [3, 7]:

- Recomenda-se a procura de modelos simples com um número de elementos de escoras e tirantes reduzido. Caso necessário, é possível refinar o modelo mais tarde;
- Orientar o modelo de acordo com o comportamento elástico para adaptar ao fluxo principal de forças;
- Os tirantes devem ter uma configuração simples, de modo a seguirem uma distribuição prática. A pormenorização final das armaduras deve estar em conformidade com o modelo utilizado na sua concepção;
- Evitar adoptar ângulos entre escoras e tirantes menores que 30° , pois violam as condições de compatibilidade;

- As escoras representam campos de compressão com uma determinada secção a ser considerada, logo, devem manter uma distância adequada da fronteira da peça;
- É possível surgirem mecanismos. Caso se verifique, o projectista deve adicionar escoras diagonais, que tornam o modelo estaticamente determinado. No entanto, deve-se verificar se estas não afectam os campos de tensões prévios;
- Para uma representação mais realista do fluxo de tensões principais, convém fazer a sobreposição de dois modelos de escoras e tirantes quando se possuem modelos hiperestáticos;
- Quando se verifica uma estrutura de estadia indeterminada, será melhor recorrer a uma optimização, para que seja possível alocar rigidez nos vários elementos de escoras e tirantes, assim como, uma análise não linear.

Inicialmente, após desenvolver alguns modelos de escoras e tirantes, este processo torna-se mais fácil. É possível observar que vários modelos de escoras e tirantes poderão ser repetidos inúmeras vezes em zonas diferentes da estrutura. Os elementos escoras e tirantes serão barras que se encontram localizadas no centro de gravidade dos respectivos diagramas de tensão.

No caso de não ser possível realizar uma análise linear elástica, poder-se-á recorrer a um método bastante simples, o método de caminho de carga (*Load Path Method*). O primeiro passo para o uso deste método é fazer uma análise do equilíbrio global da estrutura (cargas aplicadas, reacções dos apoios e esforços transmitidos de zonas B para D). O diagrama de tensões é dividido, de modo a obter um lado da estrutura que tenha cargas de igual valor do outro lado, para que os caminhos que seguem dentro da estrutura não se intersectem (figura 2.3 a). Estes seguem normalmente o caminho mais curto entre a aplicação da carga até à zona dos apoios. É possível encontrar casos onde o caminho de carga entra e sai pelo mesmo lado, tendo a forma de U [14], como se verifica por exemplo, na figura 2.3(b).

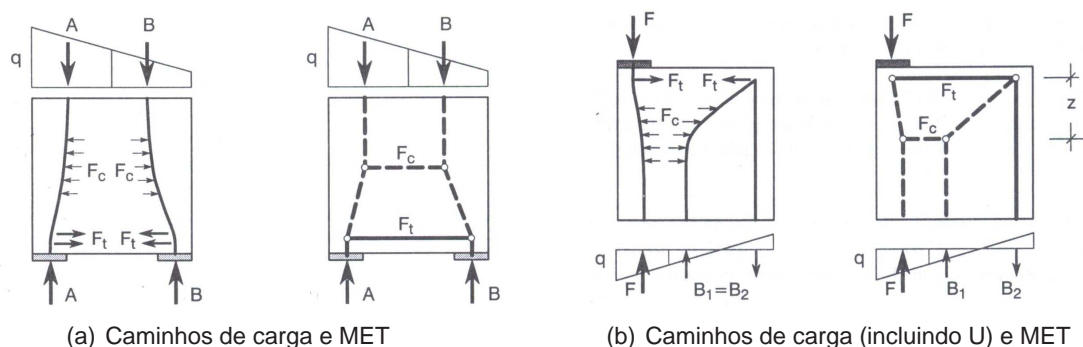


Figura 2.3: Método de caminho de carga e modelo de escoras e tirantes (adaptado de [7]).

Depois de obtidas as curvas que representam os caminhos de carga, aquelas serão substituídas por polígonos, aos quais será necessário adicionar escoras e tirantes para garantir o equilíbrio interno.

Importa referir que o recurso a uma análise linear elástica usando MEF combinado com o método do caminho de carga permite desenvolver novos modelos de escoras e tirantes. Tomando em conta os conceitos já referidos, é possível perceber que um projectista pode desenvolver vários MET. Mas qual será o modelo óptimo?

Schlaich *et al.* [14] demonstra que, na escolha do modelo, deve-se considerar que a carga aplicada se desenvolve internamente com o mínimo de forças e deformações, nunca esquecendo que os tirantes, sendo armaduras, são mais deformáveis que as escoras de betão. Assim, o facto de o modelo possuir uma quantidade menor de tirantes e de menor comprimento pode ser um critério de optimização para a escolha de um “bom” modelo [7, 14].

$$\sum F_i \cdot l_i \cdot \varepsilon_{mi} = \text{Mínimo} \quad (2.1)$$

A expressão 2.1 é deduzida através do princípio da energia mínima de deformação, calculada através do somatório da energia de deformação em todos os elementos do MET, sendo F_i a força da escora ou do tirante, l_i o comprimento da barra e ε_{mi} a extensão média da barra. Este cálculo pode ser um critério para determinar qual o melhor MET. No entanto, quanto às escoras, estas podem ser desprezadas, pois a sua extensão é muito menor que as extensão dos tirantes [7].

Por razões de execução prática pode ser preferível escolher um modelo que não seja o melhor em termos de energia, uma vez que é preferível adoptar armaduras que estejam em posições horizontais e verticais evitando modelos que apresente tirantes diagonais.

2.2.3 Dimensionamento dos Tirantes

Através do dimensionamento dos tirantes, é possível obter a quantidade de armadura necessária para resistir às forças actuantes, sendo que podem ser contabilizadas as armaduras corrente e/ou o pré-esforço.

No caso em estudo, uma vez que as armaduras são ordinárias, o seu dimensionamento é directo. A armadura obtida é dada por

$$A_s = \frac{F_t}{f_{yd}} \quad (2.2)$$

onde A_s define a área da armadura necessária, F_t a força do tirante e f_{yd} o valor de cálculo da tensão de cedência do aço. O eixo da armadura tem que coincidir com o eixo do tirante. Como boa prática, a pormenorização das armaduras deve garantir que segue as disposições construtivas encontradas no EC2.

2.2.4 Dimensionamento de Escoras e Nós

O MET acaba por substituir o campo de tensões real por um conjunto de elementos rectos com uma dada área. No entanto, existem zonas nodais onde se define o elo de ligação entre os elementos. Nestes nós, desenvolvem-se estados de tensão biaxiais ou triaxiais. No dimensionamento é necessário, para além de dimensionar as escoras e

determinar a quantidade de armadura necessária para os tirantes, verificar a capacidade resistente nos nós para assegurar a segurança da estrutura [20].

Schlaich *et al.* [14] refere três tipos de campos de compressão, que são apresentados na figura 2.4:

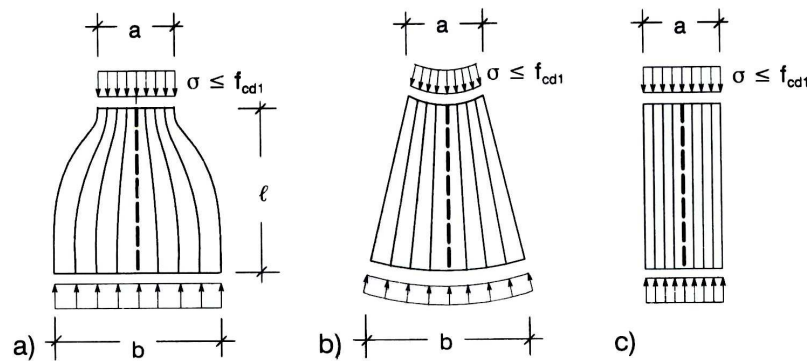


Figura 2.4: Tipos de campos de tensão de compressão [8].

- Forma de garrafa (*bottle*): este tipo de campo é uma aproximação muito realista. Observa-se que, se numa dada extremidade existe um campo de tensões elevado, no desenvolvimento do seu comprimento existe um alívio do mesmo. Tensões de desvio são geradas em ambas as extremidades, sendo que na base menor são campos de compressão e na base maior são campos de tracção, onde possivelmente deverá ser analisado este pormenor (figura 2.4 a);
- Forma de leque (*fan*): a compressão é distribuída de forma radial. Pode ser introduzido um reforço transversal, como no caso anterior, pois há tendência para haver desvios na trajectória das tensões (figura 2.4 b);
- Campo de compressão prismático: as tensões mantêm-se constantes ao longo do seu comprimento. É também um caso típico de uma região B, pode ser tratado como um campo de compressão de um pilar ou zona de compressão de uma viga sujeita a flexão (figura 2.4 c).

A análise limite foi desenvolvida com base num material rígido perfeitamente plástico. Esta suposição é razoável para o material aço em tensão, mas é uma simplificação significativa considerando a relação de tensão-deformação uniaxial do betão, tendo em conta que o comportamento do betão à compressão uniaxial, após atingir o seu pico máximo de tensão, sofre um amolecimento e, além disso, a sua capacidade de deformação é geralmente limitada. No MET, para ter em conta este comportamento do material, é introduzido um parâmetro de factor de eficácia, v , na determinação da capacidade resistente da escora. O factor de eficácia também é usado para contabilizar a redução da força causada pelo tipo de escora, devido à fendilhação e às deformações de tracção ao longo do comprimento da escora. Esta degradação pode ocorrer, por exemplo, na sobreposição de dois MET onde existe uma região em comum [9].

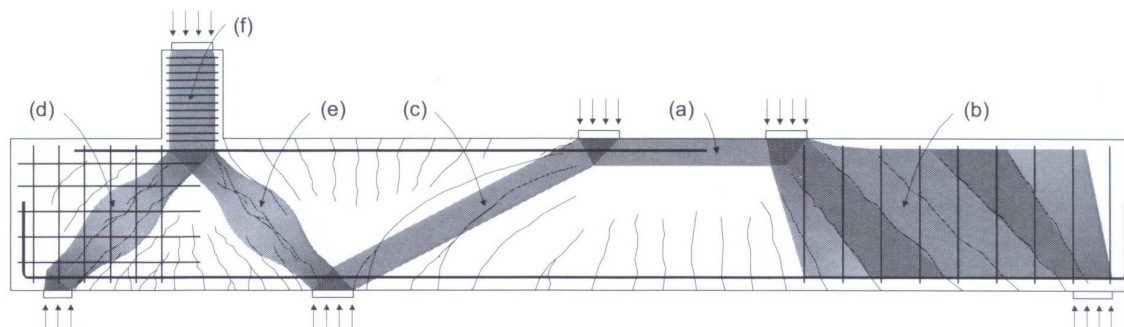


Figura 2.5: Tipos de escoras numa região D [9].

A figura 2.5 apresenta vários tipos de escoras numa estrutura típica de região D. Observa-se em a) observa-se uma escora prismática sem fendilhação, enquanto que em b) e c) são escoras do mesmo tipo mas estas têm a direcção paralela às fendas. Em d) e e) são escoras com forma de garrafa onde d) possui armadura de controlo de fendilhação e o mesmo não se verifica para e), no entanto, as orientações das fendas nestas, são paralelas às direcções das escoras. Por fim em f), observa-se ainda uma escora prismática com armadura de confinamento [9].

Definido o MET, existem zonas nodais que estabelecem a ligação com os tirantes e escoras. O processo não fica completo se se verificar apenas a existência de um elemento de betão armado, sem se prestar uma consideração especial às regiões nodais, onde as concentrações de tensões ocorrem no interior do betão. A região do nó é definida como um volume de betão onde as forças com diferentes direcções se encontram em equilíbrio. Tais forças normalmente aparecem como forças de compressão provenientes das escoras, das forças de tracção do reforço e das forças externas aplicadas aos nós.

Estas zonas nodais são responsáveis pela mudança de direcção das forças que convergem nesses nós. Para determinadas casos, a transmissão das forças é feita numa região relativamente extensa e de forma gradual, não havendo uma variação brusca na transmissão das cargas. Estes tipos de nós designam-se por nós “contínuos” (figura 2.6 b, nós II). Outro caso a referir ocorre em situações onde os campos de tensão são concentrados, levando a que a zona nodal de transferência de forças seja de dimensões reduzidas. Estes tipos de nós denominam-se nós “concentrados” (figura 2.6 b, nós I).

Durante o dimensionamento, deve-se garantir que a zona nodal tenha resistência suficiente para os campos de tensões actuates e que as armaduras resistam à força de tracção requerida pelo tirante [23]. Para os nós “contínuos”, basta garantir que as ancoragens das armaduras sejam devidamente pormenorizadas para não apresentarem problemas de resistência. No entanto, para os nós “concentrados” é preciso fazer uma análise sensível à sua resistência e à pormenorização das armaduras exigidas. Ao dimensionar o nó “concentrado”, deve-se obter a sua geometria, identificar o estado de tensão a actuar no nó, definir a resistência do betão e verificar as condições das armaduras.

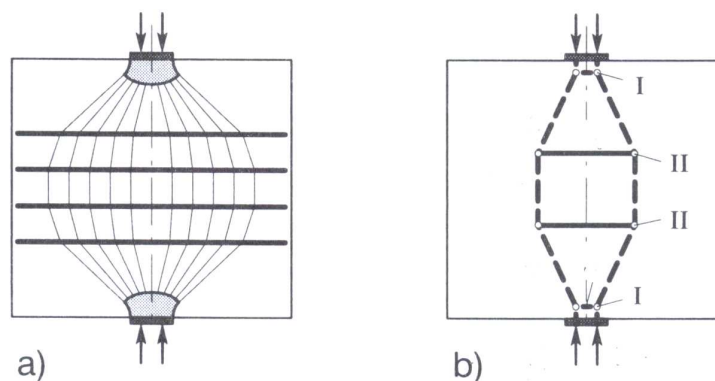


Figura 2.6: Tipos de nós na estrutura nós concentrados (I) e nós contínuos (II) (adaptado de [8]).

Um nó é uma zona do elemento estrutural onde as forças mudam de direcção, existindo pelo menos três forças a concorrerem para o mesmo nó. Desta intersecção resultam, então, vários tipos de nós (figura 2.7): nó CCC, no qual existem apenas forças de compressão; nó CCT, que corresponde a duas forças de compressão e uma de tracção; nó CTT, o contrário de CCT; e o nó TTT, onde apenas existem forças de tracção. Note-se que T representa um tirante e C uma escora.

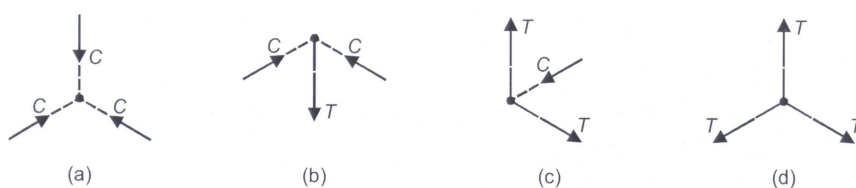


Figura 2.7: Tipos de nós: a) CCC; b) CCT; c) CTT e d) TTT [9].

Os nós são zonas muito importantes e o seu adequado dimensionamento não deve ultrapassar os valores resistentes do betão e, para o aço, há que considerar o comprimento de amarração necessário [10, 12].

As tensões de compressão nos nós resultam dos desvios de campos de compressão equilibrados por tensões de tracção dos tirantes. É preciso verificar a resistência nos nós, que consiste em verificar se as tensões de compressões adjacentes aos nós são menores que $f_{cd,eff}$, assumindo que a largura do campo depende da sua configuração e número de camadas de reforço. Na cláusula 6.5.4(4) do EC2 [1], encontram-se os valores a adoptar e que serão comparados também com os valores recomendados pelo MC90 [6]:

$$f_{cd,1} = k_1 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd}, \text{ para nós CCC} \quad (2.3)$$

com $k_1=1$, valor recomendado pelo EC2, e $k_1=0.85$, adoptado pelo MC90. Note-se que o valor de dimensionamento do betão pode ser aumentado para zonas nodais sujeitas a

compressão biaxial ou triaxial.

$$f_{cd,2} = k_2 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd}, \text{ para nós CCT} \quad (2.4)$$

com $k_1=0.85$, valor recomendado pelo EC2, e $k_1=0.7$, adoptado pelo MC90.

$$f_{cd,3} = k_3 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd}, \text{ para nós CTT} \quad (2.5)$$

com $k_1=0.75$, valor recomendado pelo EC2, e $k_1=0.6$, adoptado pelo MC90. Note-se que EC2 permite aumentar a resistência em 10% quando algumas condições favoráveis são cumpridas, por exemplo, se o reforço é colocado em várias camadas, se os ângulos entre escoras e tirantes são superiores a 55° , ou se é fornecido o confinamento adequado aos nós.

Quando se depara com várias escoras a convergir para um nó é preciso avaliar o seu estado interno de tensões. Para tal, recorre-se ao círculo de Mohr onde se verifica o estado das tensões internas, que não podem exceder o valor resistente de compressão do betão. No entanto, para o trabalho realizado não foi efectuada esta verificação por não ser alvo de estudo.

2.3 Análise Não Linear

Recorrendo à análise elástica, é possível obter modelos de escoras e tirantes a partir do fluxo de tensões de um modelo de malhas baseado no método dos elementos finitos. Uma vez que, através da observação do fluxo de tensões no elemento tem-se a informação necessária para construir o MET. Através da análise não linear, também, é possível desenvolver um modelo a partir da resposta não linear de uma estrutura verificada previamente por via experimental ou que tenha sido caso de estudo num programa onde seja possível atribuir as relações constitutivas não lineares dos materiais. A observação da evolução da fendilhação permite desenvolver um MET apropriado uma vez que as fendas numa estrutura indicam o caminho principal das tensões à compressão e de tensões à tracção sendo estas perpendiculares a fenda [18].

As análises não lineares abrangem efeitos não lineares que podem ser classificados da seguinte forma:

- Análise não linear geométrica: refere-se ao estabelecimento das equações de equilíbrio na configuração deformada da estrutura e encontra-se associado às relações cinemáticas (deformações-deslocamentos);
- Análise não linear física: traduz-se numa relação constitutiva não linear e associa-se à degradação da resistência do material (cedência, plastificação) com o aumento de carga.

Através da análise não linear, é possível obter uma previsão completa da resposta estrutural, desde o início do carregamento até ao seu colapso. Para cada incremento de carga, é possível satisfazer as condições de equilíbrio e compatibilidade. Devido a

uma evolução tecnológica, actualmente realiza-se modelações complexas, fornecendo um historial realista do comportamento da estrutura em estudo [16].

O programa *Ansys* [27] foi considerado para se efectuar as análises dos modelos numéricos. Apresenta-se, em seguida, um resumo das funcionalidades do programa.

2.3.1 *Ansys*

O programa *Ansys*, possui muitas funcionalidades que abrangem os diversos ramos de engenharia. O facto de realizar análises não lineares e de ser possível programar em APDL (*Ansys Parametric Design Language*) são factores que tornam a modelação mais acessível neste programa. Com o objectivo de reduzir o tempo em pré-processamento, o uso de APDL permite economizar o esforço de modelar projectos e direccionar mais tempo para a análise e pós-processamento. Com o conhecimento da linguagem APDL, é possível fazer alterações ao modelo com pequenas alterações no seu código.

Visto que o método iterativo escolhido no programa para a resolução dos modelos numéricos foi o Newton-Raphson, descreve-se de seguida de forma resumida este método.

Este método utiliza a matriz tangente definida para cada iteração, com base no incremento dos deslocamentos e das forças residuais resultantes das iterações anteriores. Trata-se de um processo de elasticidade variada que implica uma actualização da matriz tangente em cada iteração [17]. Este método acaba por ser um processo iterativo para a resolução de equações não lineares e é dado por:

$$[K_{n,i}^T]\{\Delta u_i\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\} \quad (2.6)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} - \{u\Delta_i\} \quad (2.7)$$

Na expressão 2.6, através da diferença entre o vector da carga total aplicada para o passo de carga n ($\{F_n^a\}$) e o vector das forças internas antes do último incremento de carga para uma dada iteração i ($\{F_{n,i}^{nr}\}$), é possível obter a combinação da matriz rigidez tangente ($[K_{n,i}^T]$) com o vector incremento de deformação devido ao actual incremento de carga ($\{\Delta u_i\}$). Para a obtenção de $\{\Delta u_i\}$, temos a expressão 2.7, onde apenas se realiza a diferença entre o vector deslocamentos de $i + 1$ e i . Os deslocamentos após cada iteração são actualizados através da adição dos incrementos de deslocamentos obtidos nessa mesma iteração e o processo termina logo que seja respeitado o critério de convergência adoptado. Para um melhor entendimento, a figura 2.8 demonstra esquematicamente como se desenvolve o processo de Newton-Raphson [27].

2.4 Propriedades dos Materiais

2.4.1 Betão à Compressão

Os modelos de comportamento do betão têm conhecido, ao longo dos anos, um acréscimo apreciável no grau de complexidade das respectivas formulações, em

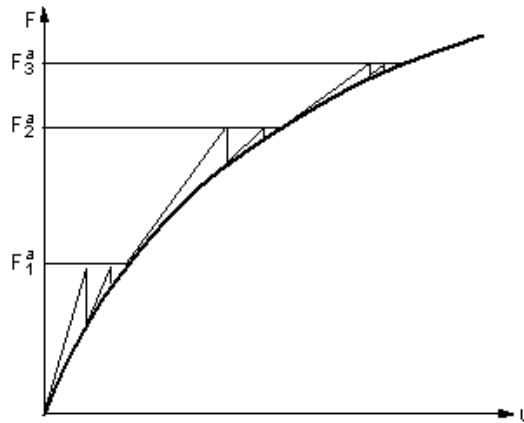


Figura 2.8: Esquema geral do processo iterativo do método Newton-Raphson [27].

consequência de um progressivo refinamento no tratamento do comportamento não linear característico deste material [16]. Neste âmbito, os modelos mais sofisticados, desenvolvidos com base no MEF, são particularmente exigentes no que se refere à caracterização do comportamento do material, requerendo a definição integral do comportamento deformacional do betão, para além do conhecimento dos estados últimos de tensão suportáveis por este material e caracterização dos modos de fractura que lhe estão associados.

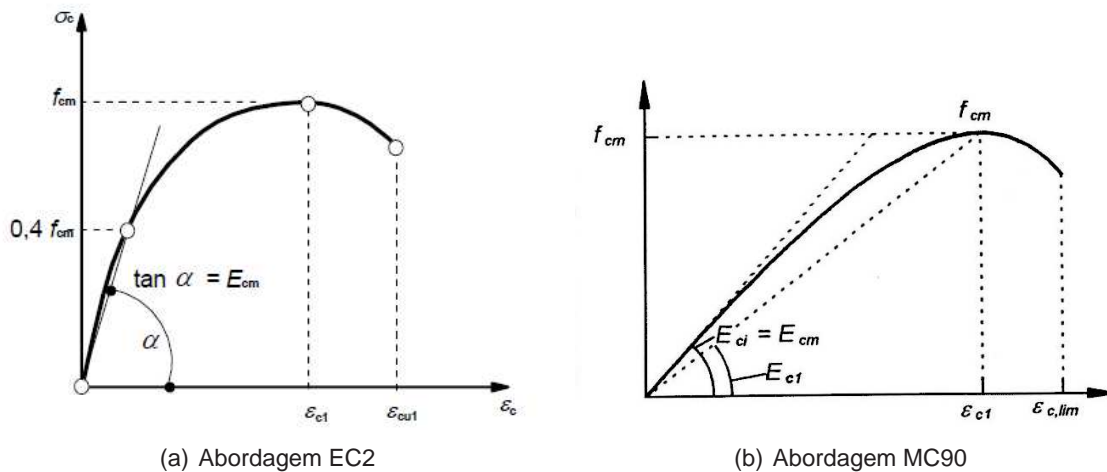


Figura 2.9: Relação constitutiva de betão à compressão

Para as diferentes classes de betão é possível observar no Quadro 3.1 do EC2 [1] as suas características para as várias classes de betão. Na cláusula 3.1.5 do EC2, é definida a relação tensão-deformação para a análise estrutural não linear, que é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta} \quad (2.8)$$

onde η e k são definidos por:

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (2.9)$$

e

$$k = 1.05 \cdot E_{cm} \cdot \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}, \text{ segundo EC2} \quad (2.10)$$

sendo, ε_c a extensão do betão à compressão, ε_{c1} a extensão do betão à compressão correspondente à tensão máxima f_{cm} , E_{cm} define o módulo de elasticidade secante do betão e f_{cm} sendo o valor médio da tensão de rotura do betão à compressão. Na figura 2.9(a) observa-se a relação tensão-deformação do betão à compressão sugerido pelo EC2.

Na cláusula 5.1.8.1 do MC90 [6], é sugerido para a mesma expressão (2.8) uma alteração no parâmetro k que é definido por:

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}}, \text{ segundo MC90} \quad (2.11)$$

O EC2 considera ainda que a extensão limite para a compressão (ε_{cu}) deve tomar o valor de 3.5‰, refere-se ainda que ε_{c1} varia consoante as classes de betão adoptado.

2.4.2 Aço

Apresenta-se alguns modelos propostos para simular o comportamento monotónico dos varões de aço para betão armado:

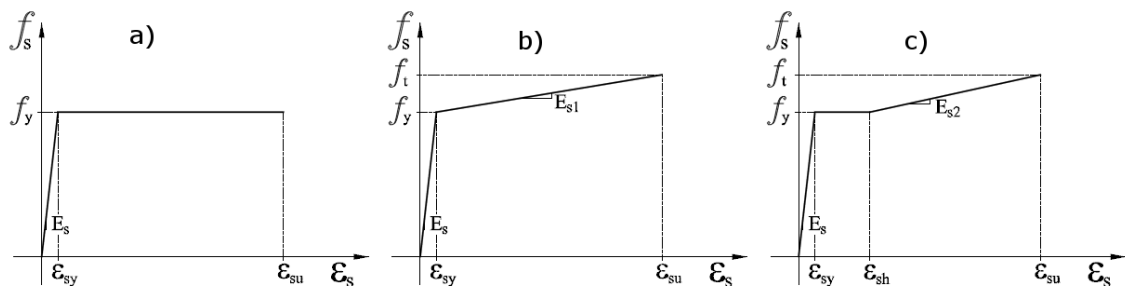


Figura 2.10: Modelos do aço: a) elasto-plástico, b) bilinear e c) trilinear [22].

- O modelo elasto-plástico (figura 2.10 a) é constituído por dois troços rectos. O primeiro é considerado o declive correspondente ao módulo de elasticidade do aço e, para o segundo troço, admite-se que não há endurecimento, logo tem-se um declive nulo;
- O modelo bilinear (figura 2.10 b) é semelhante ao primeiro caso, mas com endurecimento após a cedência;
- O modelo trilinear (figura 2.10 c) é constituído por três troços rectos. O primeiro tem o declive do módulo de elasticidade, o segundo corresponde ao patamar de cedência entre a extensão de cedência (ε_{sy}) e a extensão de endurecimento (ε_{sh}).

e o terceiro troço corresponde ao endurecimento entre a tensão de cedência (f_y) e a tensão máxima (f_t) verificada entre (ε_{sh}) e a extensão total na força máxima (ε_{su}) [22].

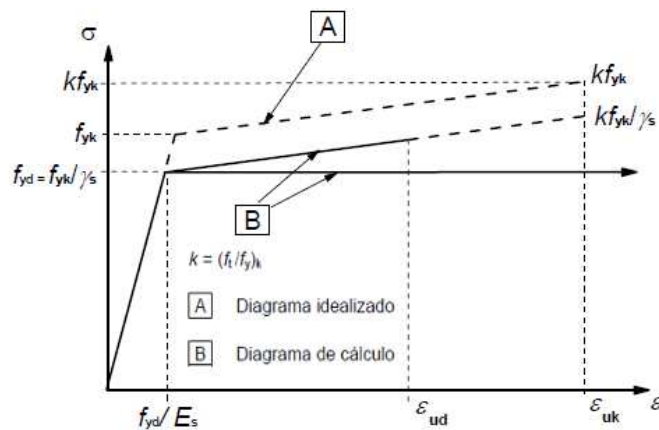


Figura 2.11: Relações constitutivas para o aço em armaduras [1].

O EC2 estipula no ponto 3.2.7 que o comportamento do aço é considerado simétrico, contendo as mesmas propriedades para tracção e compressão. O ponto 3.2.7(4) do EC2 permite admitir um valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço (E_s) de 200 GPa.

2.4.3 Efeito *Tension-stiffening*

Sabe-se que o betão entre fendas continua a suportar tensões de tracção após o início da fendilhação numa peça de betão armado. Isto acontece devido à aderência das armaduras e ao betão encontrado na sua vizinhança. Este efeito designa-se por *tension-stiffening*. É importante considerar o *tension-stiffening* quando se avaliam os estados de serviço de estruturas de betão armado. Este efeito depende de vários factores, tais como dimensões da peça, taxa de armadura, diâmetro das armaduras, módulo de elasticidade e tensão resistente [25].

A modelação de *tension-stiffening* poder ser realizado através de dois métodos: o primeiro consiste em modificar a rigidez do reforço do aço, enquanto que o segundo faz-se uma alteração à rigidez do betão para resistir ainda à tracção, após a formação das fendas.

No primeiro modelo, a transferência de esforço realizada pelo aço e o betão deve-se à aderência entre estes dois materiais (*bond slip*) e pode ser traduzido efectuando uma alteração na rigidez do aço, como é ilustrado na figura 2.12. O MC90 define as seguintes fases desta alteração: (a) zona não fendilhada do betão, (b) formação de fendas, (c) estabilização de fendas e (d) cedência do aço.

A segunda abordagem consiste em modificar as propriedades do betão (figura 2.13). Este tipo de modelação é geralmente assumido por ser independente da largura

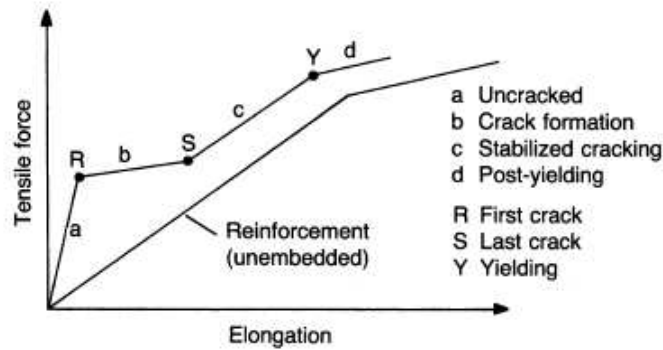


Figura 2.12: Relação constitutiva do aço com efeito de *tension-stiffening* (adaptado de [6]).

das fendas, direcção e taxa das armaduras, por estas razões, é uma das relações constitutivas mais versátil e de elevada aplicabilidade na execução de análises estruturais com betão armado [9]. Na análise estrutural, é comum desprezar a resistência que o betão possui à tracção. No entanto, Vecchio [26] propõe a expressão 2.12, que altera a rigidez do betão após a fendilhação.

$$f_{c1} = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_{c1}, & \varepsilon_{cr} > \varepsilon_{c1} > 0 \\ \frac{f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \cdot \varepsilon_{c1}}}, & \varepsilon_{c1} > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (2.12)$$

Na expressão acima, f_c , que corresponde à tensão à tracção do betão, E_c , considera-se o módulo de elasticidade do betão e ε_{cr} , a extensão na qual se dá a fendilhação. Sabendo E_c e o valor máximo de f_c , é possível determinar ε_{cr} através da expressão 2.13.

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_c}{E_c} \quad (2.13)$$

A figura 2.13 permite observar graficamente o comportamento do betão à tracção.

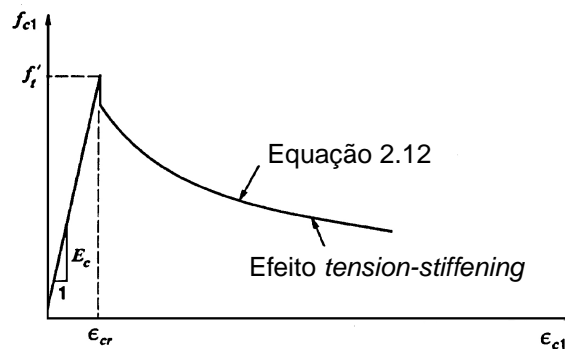


Figura 2.13: Relação constitutiva do betão à tracção com efeito de *tension-stiffening* (adaptado de [26]).

2.5 Fundamentos de Optimização Estrutural

2.5.1 Introdução à Optimização Estrutural

Desde 1872 que existe o conceito de optimização estrutural. Um dos pioneiros foi Maxwell [4], que decidiu otimizar uma ponte para que utilizasse a menor quantidade de material e, ao mesmo tempo fosse, funcional. Através dos conceitos da teoria da elasticidade, determinam-se as direcções das tensões principais para um dado domínio numa estrutura sujeita a uma carga. Uma vez obtidas essas direcções, Maxwell sugeriu que a estrutura óptima seria aquela que utilizasse menos material, deste modo, elaborou uma estrutura de elementos de treliça onde os elementos se encontravam orientados segundo as direcções das tensões principais. Esta ideia foi retomada por Michell, em 1904, que decidiu estudar a optimização estrutural para vários projectos [24].

A figura 2.14, apresenta o problema estudado por Michell, assim como a sua forma optimizada.

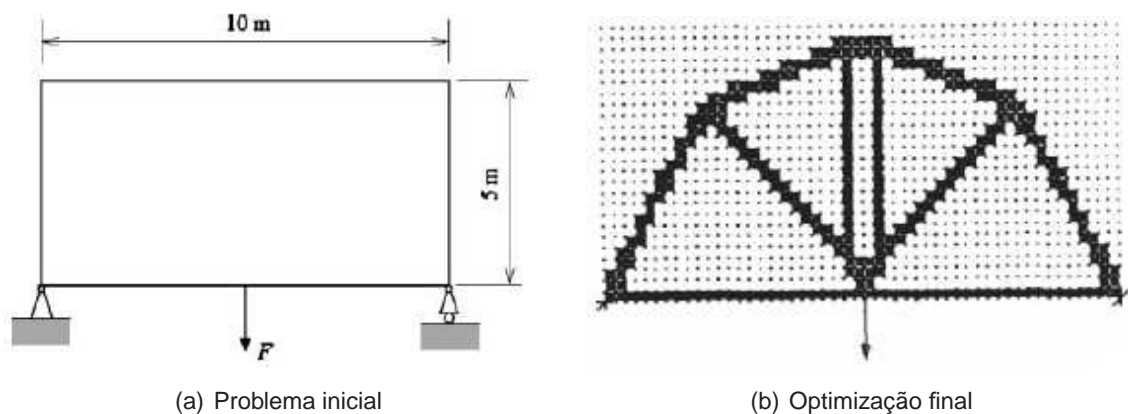


Figura 2.14: Optimização da estrutura de Michell [28]

A figura ilustra a estrutura inicial, onde foi considerado uma viga parede com dois apoios nos seus extremos e é aplicado um carregamento a meio vão (2.14 a). Quanto à estrutura optimizada, o conjunto de elementos sólidos representa os elementos de treliça que se encontram à tracção e à compressão (2.14 b).

Ao longo do tempo, foram surgindo outras novas técnicas de optimização que, posteriormente, com o surgimento de recursos computacionais passaram, a ser incluídas em programas comerciais. Actualmente, a optimização estrutural é encontrada em vários campos de engenharia (estrutural, mecânica, eléctrica, fluidos).

Referem-se a seguir alguns conceitos básicos sobre a optimização. Para determinar uma solução de optimização estrutural, é necessário que um problema seja definido da seguinte maneira [5, 20, 24]:

- Função objectivo (*Objective function*): está relacionada com a grandeza de maximizar ou minimizar um parâmetro. Este pode ser, por exemplo, a rigidez de

uma estrutura, o volume da peça, a frequência de uma estrutura, os custos, entre outros;

- Variáveis de projecto (*Design variables*): são parâmetros que podem ser alterados durante o processo de optimização. Estes poderão ser atribuídos, como por exemplo, às dimensões de uma peça ou às propriedades dos materiais. O projectista tem de identificar as variáveis de acordo com o objectivo em causa;
- Variáveis de estado (*State variables*): são limites à solução. Através destas variáveis, é possível garantir a admissibilidade e fiabilidade da solução. Podem ser os valores mínimos e máximos para deslocamentos, tensões, deformações, força num dado ponto da peça, entre outros.

De uma forma geral, um problema de optimização estrutural (SO) adquire a seguinte forma [5]:

$$\text{SO} \begin{cases} \text{minimizar } f(x, y) \\ \text{sujeito a} \end{cases} \begin{cases} \text{restrições de comportamento em } y \\ \text{restrições de dimensionamento } x \\ \text{restrições de equilíbrio} \end{cases} \quad (2.14)$$

Pretende-se, então, minimizar uma função objectivo, onde as variáveis da função serão as de projecto (x) e de estado (y) que ficam sujeitas a determinadas restrições. Estas permitem definir o domínio das variáveis em causa.

2.5.2 Tipos de Optimização Estrutural

Para um dado problema, é possível determinar uma solução óptima, recorrendo a um dos três tipos de optimização [4, 13, 28]:

- Optimização paramétrica (*Sizing optimization*): Neste tipo de optimização são, escolhidas variáveis de projecto que caracterizam a geometria da estrutura (por exemplo, espessura, altura, comprimento), sendo que é corrente no uso treliças, cujo objectivo principal é encontrar a secção óptima para cada elemento de uma treliça. Pretende-se deste modo, determinar os valores óptimos das secções de cada elemento da treliça. Assim, atribuindo uma dada restrição no material, obtém-se uma estrutura menos flexível. Esta optimização apenas altera as secções dos elementos mantendo a forma da estrutura. A principal característica deste tipo de optimização é que, durante a optimização, é conhecido o domínio do problema e as variáveis de estado são definidas logo no início do processo (figura 2.15 a);
- Optimização de forma (*Shape optimization*): Neste tipo de optimização, os contornos externos da estrutura são parametrizados por curvas *splines* e as variáveis de projecto, são os parâmetros que definem estas curvas. A optimização de forma tem como objectivo, determinar os parâmetros óptimos das curvas que definem os contornos da estrutura. Logo, uma estrutura óptima será aquela, que minimiza a flexibilidade para a restrição do material considerado. Através desta optimização observa-se que os contornos da estrutura são alterados (figura 2.15 b);

- **Optimização topológica (*Topology optimization*):** Este tipo de optimização pode ser particularizado para estruturas discretas e contínuas. No caso das estruturas discretas como treliças, procura-se obter a ordem espacial dos elementos. No caso de estruturas contínuas, o objectivo principal é determinar a melhor localização e geometria das cavidades do seu domínio. O processo de optimização procura encontrar a topologia da estrutura, determinando em cada ponto do seu domínio se deve ou não haver material, que é corrente ser representado por elementos sólidos e elementos vazios. Na visualização da estrutura em termos de densidade, estes adquirem valores de 0, para inexistência de massa, e 1, para concentração de massa (figura 2.15 c). Quanto às optimizações referidas anteriormente, a optimização topológica é a que resulta na maior remoção de material da estrutura.

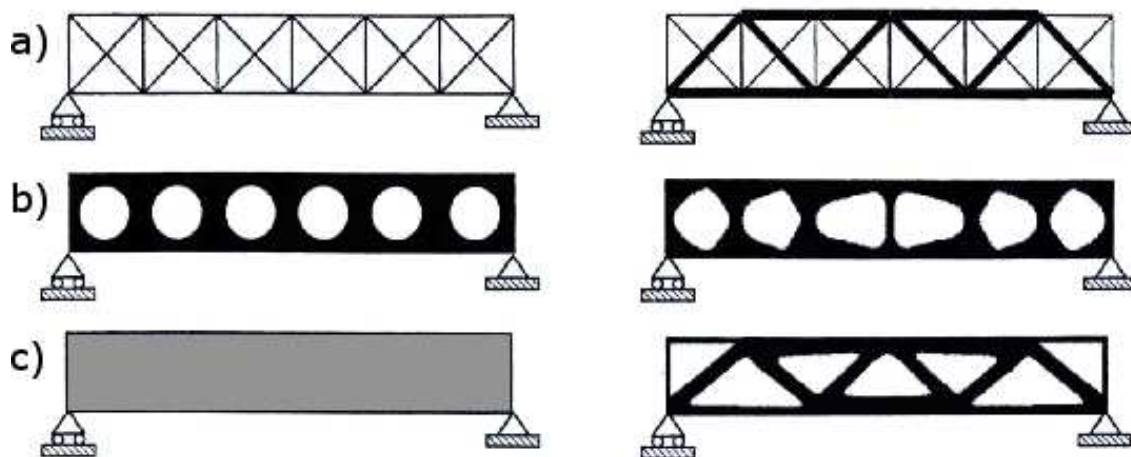


Figura 2.15: Três tipos de optimização estrutural: a) optimização paramétrica de uma treliça, b) optimização de forma, c) optimização topológica (adaptado de [4]).

A optimização topológica tem sido exaustivamente estudada, de forma a terem sido desenvolvidas novas técnicas de optimização. Dessas técnicas, a optimização estrutural evolucionária (*Evolutionary Structural Optimization - ESO*) é umas das técnicas mais populares da optimização topológica [13].

O método ESO foi proposto, inicialmente, por Xie e Steven [28] no início dos anos 90, e a partir desse período, têm sido continuamente desenvolvido para vários problemas na área de optimização topológica. O ESO baseia-se num conceito simples de retirar gradualmente material ineficiente de uma estrutura. Através deste processo, a estrutura evolui para uma forma e topologia óptima. Note-se, teoricamente, não se poder garantir que tal processo produz a melhor solução, no entanto, a técnica ESO fornece uma ferramenta útil para os engenheiros interessados em explorar formas estruturalmente eficientes [13]. De seguida, apresenta-se um resumo do andamento de um processo de optimização.

Processo de Evolução

Recorrendo a uma análise elástica através de MEF, é possível determinar o nível de tensões existentes numa estrutura. Um indicador do uso ineficiente de um material é quando este possui valores baixos de tensões ou extensões em algumas zonas da estrutura. Desta forma, torna-se possível obter um critério de rejeição baseado nos níveis de tensões locais. Assim, quando existir elementos com baixas tensões, assume-se que estes estão a ser subutilizado, deste modo, os elementos acabam por ser removidos da malha dos elementos finitos [13]. Recorre-se frequentemente ao critério de von Mises (σ^{vm}) (equação 2.15), no caso de estado plano, para determinar se cada elemento a analisar deve ser removido.

$$\sigma^{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (2.15)$$

De acordo com a equação, σ_x e σ_y são as tensões normais segundo a direcção x e y e τ_{xy} corresponde à tensão de corte. Para identificar quais os elementos que têm de ser removidos, estes são determinados através da comparação da tensão de von Mises do elemento (σ_e^{vm}) com a máxima tensão de von Mises instalada em toda a estrutura (σ_{max}^{vm}). No fim de cada análise de elementos finitos, todos os elementos que satisfaçam a seguinte condição serão removidos (equação 2.16).

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{max}^{vm}} < RR_i \quad (2.16)$$

onde RR_i (*Rejection Ratio*) se designa por critério de rejeição associada à iteração i , que também está associada ao número da evolução. Após cada ciclo de análise, actualiza-se a malha devido à remoção de elementos e corre-se de novo uma análise elástica. Este processo é repetido até que RR_i converge para um estado de equilíbrio, ou seja, obtém-se uma solução quando já não existem mais elementos que deveram ser eliminados para o RR_i adoptado para iteração i . Assim, o processo de evolução da estrutura em estudo evolui até atingir uma solução óptima. O processo de evolução pode-se resumir da seguinte forma [13]:

1. Discretizar a estrutura utilizando uma boa malha de elementos finitos;
2. Levar a cabo uma análise elástica de elementos finitos;
3. Remover os elementos que satisfaçam a equação 2.16;
4. Aumentar o RR_i caso seja atingido um estado de equilíbrio, de forma a refinar a optimização;
5. Repetir os passos 2 a 4 até se chegar a uma solução óptima.

Para uma melhor compreensão destes conceitos de optimização, apresenta-se, na figura 2.16, um diagrama ilustrando o processo de optimização realizado pelo *Ansys*. O programa considera valores pré-definidos para executar este processo.

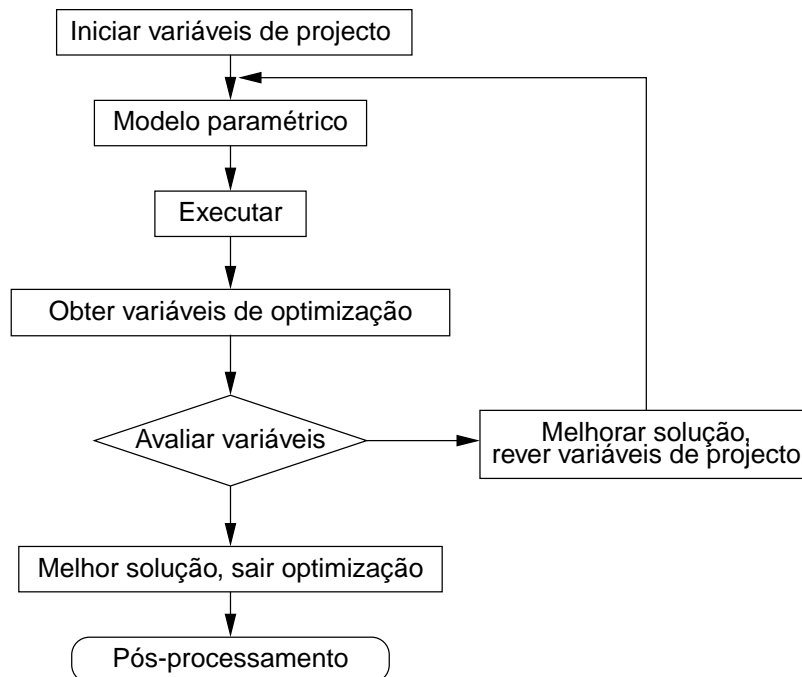


Figura 2.16: Procedimento para chegar à solução óptima (adaptado de [29]).

2.6 Optimização Estrutural em Modelos de Escoras e Tirantes

Foi visto, que obter os modelos de escoras e tirantes através de soluções elásticas do MEF, apresenta bons modelos assim como bons resultados. No entanto, para utilizar esta técnica é necessária a visualização da distribuição das tensões elásticas através da trajectória das tensões ou das tensões principais. As escoras são dispostas de acordo com as tensões principais de compressão, assim como, os tirantes são identificados pelas tensões principais de tracção. De modo a visualizar as tensões principais, em programas de cálculo, adopta-se com frequência uma análise de elementos finitos de estados planos de tensão considerando um comportamento isotrópico linear.

Também é possível obter os modelos de escoras e tirantes através da análise não linear. Esta análise é útil quando a capacidade resistente de um MET numa região de descontinuidade geométrica necessita de ser melhor estimada. No entanto, este método é questionável devido ao comportamento não linear dos materiais que é afectado quando surge a fendilhação. Após a fendilhação do betão, as tensões instaladas no betão tem que ser transferidas para o aço, deste modo, existe uma redistribuição dos esforços.

Recentemente, a optimização topológica de estruturas contínuas tem sido introduzido em modelos de escoras e tirantes para identificar qual o melhor modelo.

2.6.1 Geração Automática em Modelos de Escoras e Tirantes

Dos métodos referidos para obter o MET foram estudadas novas técnicas para a geração automática de MET.

Liang *et al.* [15] propôs este tipo de optimização assumindo que o betão tem comportamento elástico linear. Neste estudo, a solução óptima é obtida através da minimização do volume da estrutura, mantendo a energia de deformação elástica dentro de um valor prescrito.

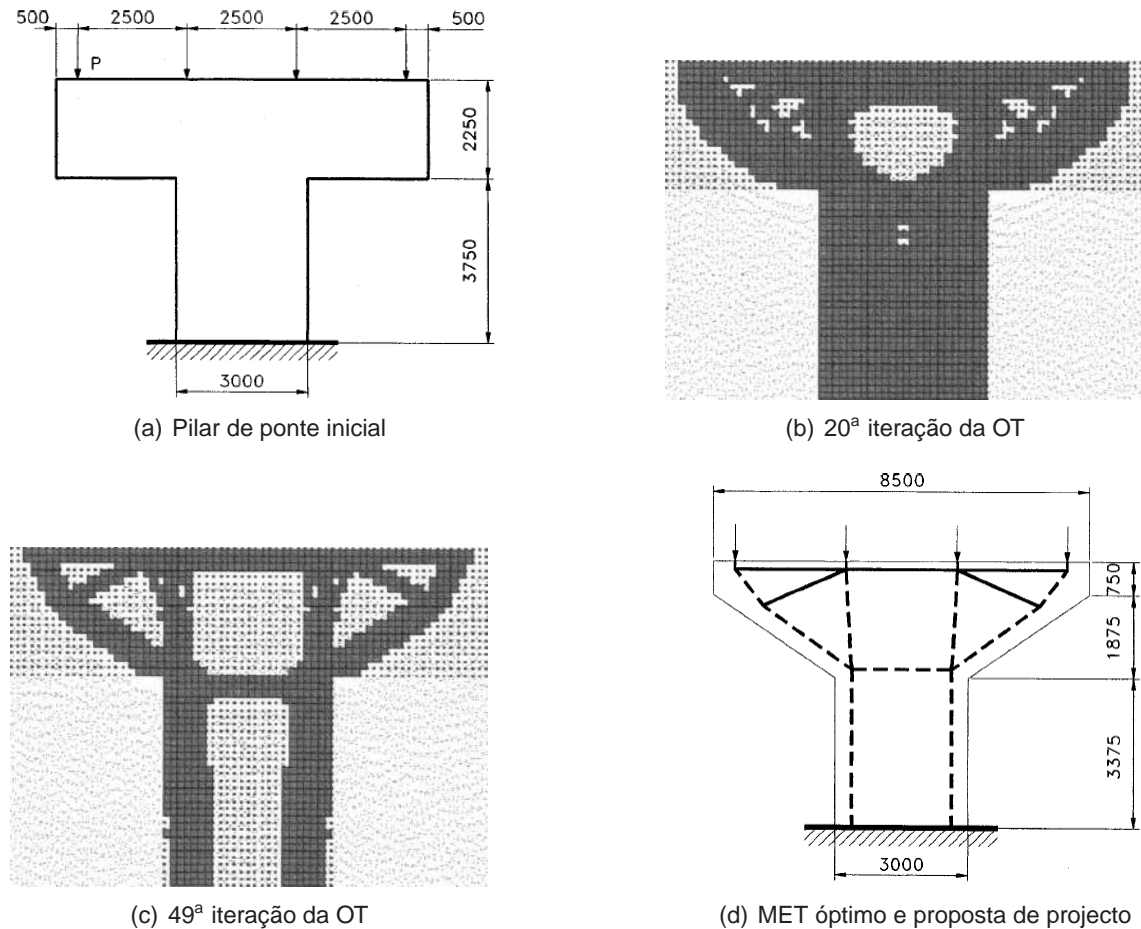


Figura 2.17: Optimização topológica de o pilar de ponte estudado por Liang *et al.* [15].

Na figura 2.17, observa-se em a) o problema inicial do pilar de ponte, em b) e c) ilustra-se a evolução da optimização topológica e note-se que houve um acréscimo na remoção de material da iteração 20 para a 49. Finalizado o processo de optimização, em d), tem-se um MET óptimo e ainda se observa que houve uma alteração na forma da estrutura inicial.

Outro exemplo da geração automática do MET é o trabalho de Ali e White [2], onde eles usam a OT de treliças para gerar modelos de escoras e tirantes optimizados. Nesta técnica de optimização, a treliça básica é desenvolvida numa estrutura de região D em estudo. A treliça é composta por nós e elementos pré-definidos pelo utilizador (figura 2.18 a), uma vez que, este apenas conhece o domínio da estrutura e todos os nós serão interligados através de elementos. Desta forma, elabora-se uma treliça com bastantes elementos, representando todos os modelos de escoras e tirantes possíveis. Esta técnica permite obter o MET mais adequado, ou seja, a treliça final é no

fundo o MET ótimo (figura 2.18 b).

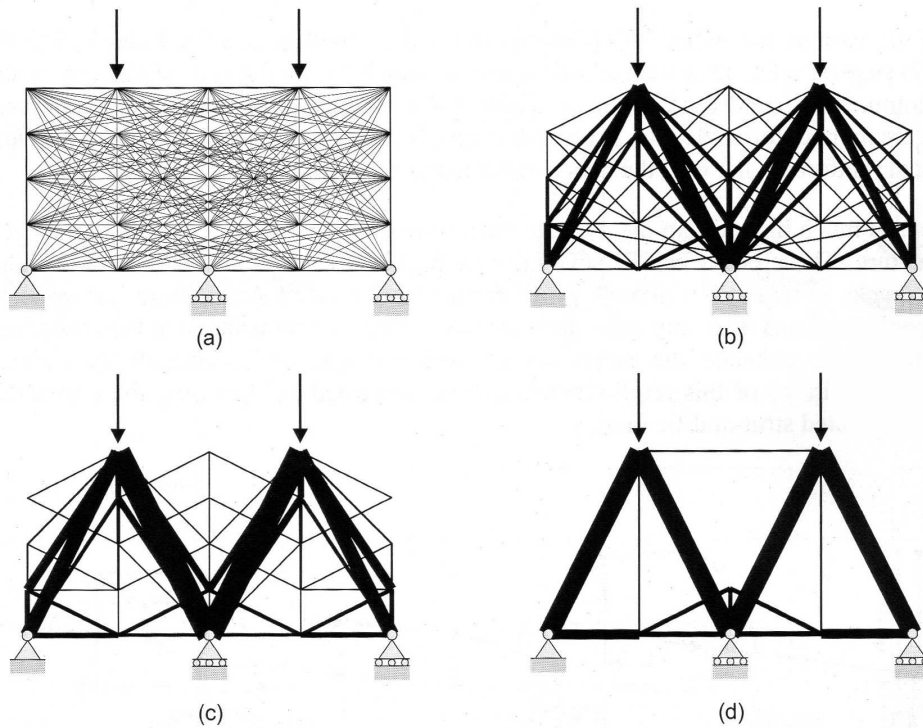


Figura 2.18: Exemplo de geração automática de um modelo de escoras e tirantes de uma parede viga: a) treliça básica; b) 3ª iteração da OT; c) 6ª iteração da OT; e d) OT na 30ª iteração [2].

Neste capítulo, foram revistos os conceitos teóricos sobre o modelo de escoras e tirantes, a não linearidade dos materiais, tendo sido também apresentada uma breve introdução ao programa *Ansys*, assim como alguns conceitos sobre a otimização estrutural.

Capítulo 3

Modelação Numérica e Validação

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma abordagem da metodologia da modelação numérica para desenvolver estruturas de treliça através do MET, recorrendo ao programa de elementos finitos *Ansys*. Deste modo, é explicado como desenvolver a modelação e são também modelados numericamente alguns elementos em betão armado estudados por Filho para validar esta metodologia.

Neste estudo, foram utilizados apenas elementos de barra para as modelações numéricas de treliça. Estes são elementos simples que são recorrentes em pórticos ou treliças. Para peças de betão armado, é muito comum usar estes tipos de elementos para definir como armadura ordinária. Filho desenvolveu paredes resistentes que foram mais tarde ensaiadas até à rotura, tendo sido dimensionadas através de diferentes modelos de escoras e tirantes. Assim, apresentam-se neste capítulo as modelações numéricas das treliças dos modelos escoras e tirantes adoptado por Filho. Posteriormente, é efectuada uma análise não linear destes modelos numéricos, que servirá para validar a formulação, comparando os resultados com os modelos experimentais.

Nesta secção, é apresentado em resumo o estudo feito por Filho e, ao mesmo tempo, apresenta-se o estudo feito pelo autor. O estudo realizado por Filho [10] representa um total de doze ensaios experimentais ensaiados no Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico. Estes modelos experimentais consistiam em paredes de betão armado com o objectivo de estudar o comportamento da estrutura em zonas D sujeitas a uma força horizontal monotónica. Este estudo foi dividido em duas fases. A primeira fase abrange o dimensionamento de modelos contabilizando apenas a análise elástica. Após os ensaios destes e revendo os resultados obtidos, passa-se para a segunda fase, onde os modelos de escoras e tirantes destas paredes foram refinados, a fim de observar as diferenças dos comportamentos durante os ensaios. A presente dissertação apenas considera três modelos utilizados por Filho. Para uma melhor compreensão, os modelos experimentais serão referenciados por “EXP”, enquanto os modelos numéricos serão referenciados por “MEF”.

O modelo experimental escolhido por Filho [10] consiste numa parede resistente encastrada numa viga rígida de betão armado, existindo uma abertura na zona de ligação

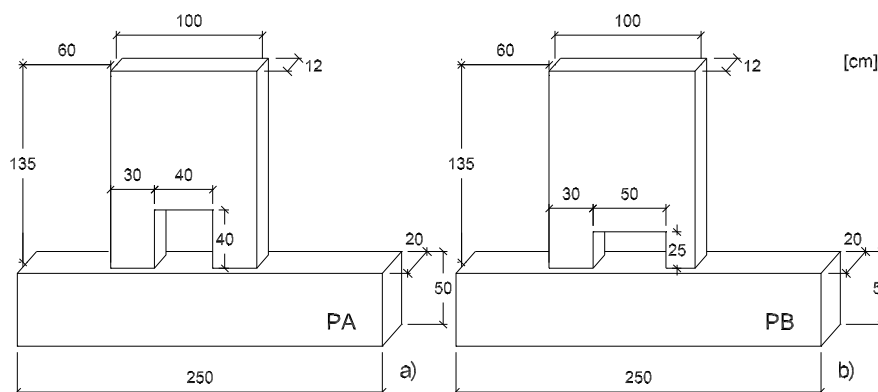


Figura 3.1: Modelos experimentais - modelo PA (a) e modelo PB (b) (adaptado de [10]).

da parede resistente à viga rígida. Inicialmente, foram concebidos dois modelos PA e PB com dimensões diferentes nas aberturas, como é ilustrado na figura 3.1. Durante o estudo feito por Filho, foi sempre monitorizado e testado o processo de produção, a instrumentação, o acompanhamento do ensaio, os tipos de leitura, os modos de aplicação da carga e a eficácia do sistema dos apoios, para garantir uma boa qualidade da informação obtida.

No dimensionamento dos modelos referidos, foi efectuada uma análise elástica dos modelos experimentais podendo ser vistos os resultados na figura 3.2, onde Filho conclui o seguinte:

- Existência de elevadas concentrações de tensões na zona de aplicação da força, associadas a uma região D;
- No topo da abertura, verificam-se tensões de tracção à esquerda e tensões de compressão à direita;
- Na região central da parede, as tensões principais de tracção e compressão são de valor semelhante e apresentam uma inclinação de aproximadamente 45°;
- As direcções das tensões principais de tracção à esquerda e de compressão à direita da parede são praticamente verticais ao longo da altura da peça;
- Os estados de tensão dos pilaretes, tanto à esquerda como à direita, são simétricos e de sinal contrário.

Após ter sido realizada a primeira fase e ter-se avaliado o comportamento estrutural dos modelos experimentais, passa-se à segunda fase, aproveitando as conclusões retiradas da primeira. O modelo PA foi escolhido para ser avaliado na segunda fase, pois a sua geometria mostrou-se mais adequada ao estudo de problemas de descontinuidade.

Filho, na segunda fase do desenvolvimento do seu estudo, avaliou vários detalhes. Um deles foi o comportamento da parede dimensionada para diferentes modelos de escoras e tirantes, com a finalidade de observar as aberturas de fenda e a mobilização efectiva da capacidade resistente, ou seja, o comportamento em serviço [10], assim, sendo que estes foram os pormenores tidos em conta na realização deste estudo.

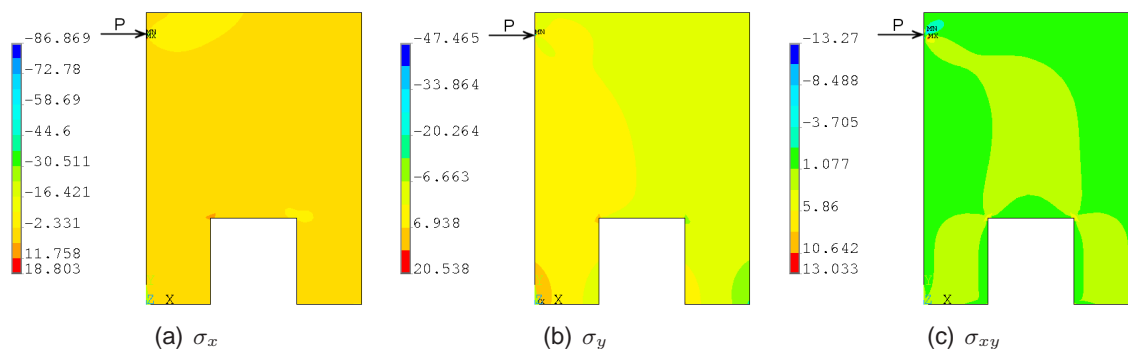


Figura 3.2: Análise elástica para uma carga de 100 kN - (a) tensões normais segundo as direcções x, (b) tensões normais segundo as direcções y e (c) tensões tangenciais segundo xy.

Foram, assim, considerados três tipos de modelos para a transmissão da carga:

- Modelo tipo 1 (MB1), em que a carga segue um caminho de compressão transversal (figura 3.3 (1));
- Modelo tipo 2 (MB2), em que a carga segue um caminho por tracção transversal (figura 3.3 (2));
- Modelo tipo 3 (MB3), em que é adoptada uma sobreposição dos modelos MB1 e MB2 (figura 3.3 (3)).

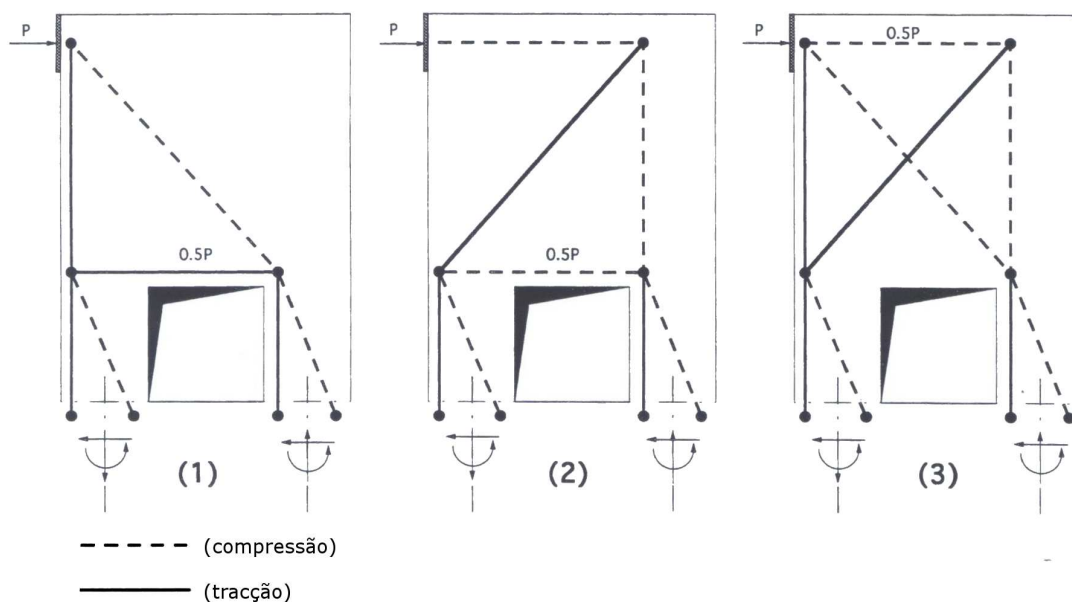


Figura 3.3: Modelos básicos de transmissão da carga - (1) modelo de compressão, (2) modelo de tracção e (3) modelo misto (adaptado de [10]).

Apresenta-se, de seguida, o material que foi usado para conceber estes modelos experimentais da segunda fase. Foi utilizado betão de classe B-30 (corresponde

actualmente ao betão C25/30) e aço nervurado A500NR numa gama de diâmetros de 6 a 16 mm. Os valores da resistência média destes materiais são apresentados nas tabelas 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1: Valores de resistência média à compressão e à tracção dos betões [10].

Modelos	Idade (dias)	$f_{cm, cubo}$ (MPa)	$f_{cm, cilindro}$ (MPa)	f_{ctm} (MPa)
MB1ee	76	51	42	3.0
MB2ee	80	51	42	3.0
MB3ee	83	51	42	3.0

Tabela 3.2: Valores de resistência média dos aços (2.^a fase) [10].

Diâmetro mm	Secção (mm ²)	f_{sy} (MPa)	f_{su} (MPa)
6	28.0	480	630
8	45.0	560	644
10	72.0	530	670
12	105.0	550	616
16	191.0	600	666

Na figura 3.4, é ilustrado o esquema dos ensaios realizados por Filho [10] no Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico. Observa-se uma laje de reacção e uma parede de reacção, que formam os apoios do modelo.

Para a aplicação da carga, foi usado um macaco hidráulico. Para o dimensionamento dos modelos MB1ee, MB2ee e MB3ee, foram verificadas a resistência a segurança para estados limite de serviço e últimos.

Na próxima secção, serão abordado os três modelos numéricos realizados neste estudo, explicando, de forma resumida, como foram modelados. Os resultados obtidos nas análises não lineares serão comparados com os ensaios experimentais de Filho. No anexo C, encontra-se o *script* utilizado apenas para a sua modelação, pois a interpretação dos resultados obtidos no *Ansys* foram vistos manualmente na *interface* deste programa (*Graphical User Interface - GUI*).

3.2 Exemplo de Validação

Nesta secção, são descritos, de forma resumida, os três modelos numéricos abordados neste estudo. Uma vez que os modelos foram modelados pelos mesmos processos, apenas se pormenoriza de forma mais detalhada o modelo MB1ee-MEF.

Os resultados obtidos nas análises numéricas são comparados com os resultados dos ensaios experimentais, de modo a validar os modelos.

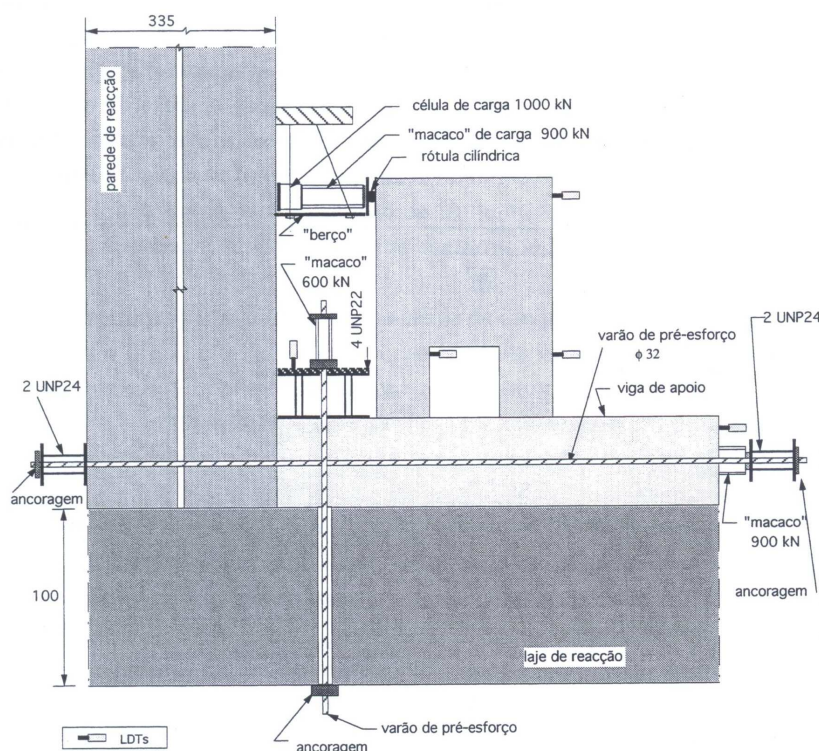


Figura 3.4: Esquema geral do ensaio [10].

3.2.1 Modelo MB1ee

Segundo Filho, o modelo do tipo 1 (figura 3.3 (a)) segue uma transmissão da carga aplicada através de uma escora principal, transversal à parede. A figura 3.5 permite entender melhor o comportamento interno da estrutura com o MET adoptado. Do nó de aplicação da carga até ao topo do pilarete direito surge um aumento da largura do campo de compressão, estando-se perante uma escora do tipo forma de garrafa, tal como referido na secção 2.2.4 (página 8). Nos pilaretes, as cargas provenientes são transmitidas através de tensões de compressão do tipo leque e paralelos, que se aproximam a regiões contínuas (tipo B) [10]. Na figura 3.5 observam-se com maior detalhe as características referidas e os esforços calculados.

O desenvolvimento do modelo em *Ansys* foi extensivamente analisado até ter sido adoptado o tipo de elemento adequado, assim como as propriedades dos materiais a utilizar. Inicialmente, com o objectivo de arranjar uma metodologia simples para efectuar análises não lineares, fez-se uma abordagem adoptando elementos tipo viga, *BEAM189* (figura 3.6). Trata-se de um elemento quadrático de três nós onde a teoria de vigas de Timoshenko é considerada. Cada nó possui seis graus de liberdade, nomeadamente deslocamentos e rotações segundo as direcções x, y e z. Este elemento tem a opção de variar a secção da viga em função do seu comprimento, sendo assim possível uma boa modelação da geometria dos tipos de escoras referidos na secção 2.2.4. No entanto, o elemento *BEAM189* considera momentos flectores onde, no caso de treliças não são tomados em conta.

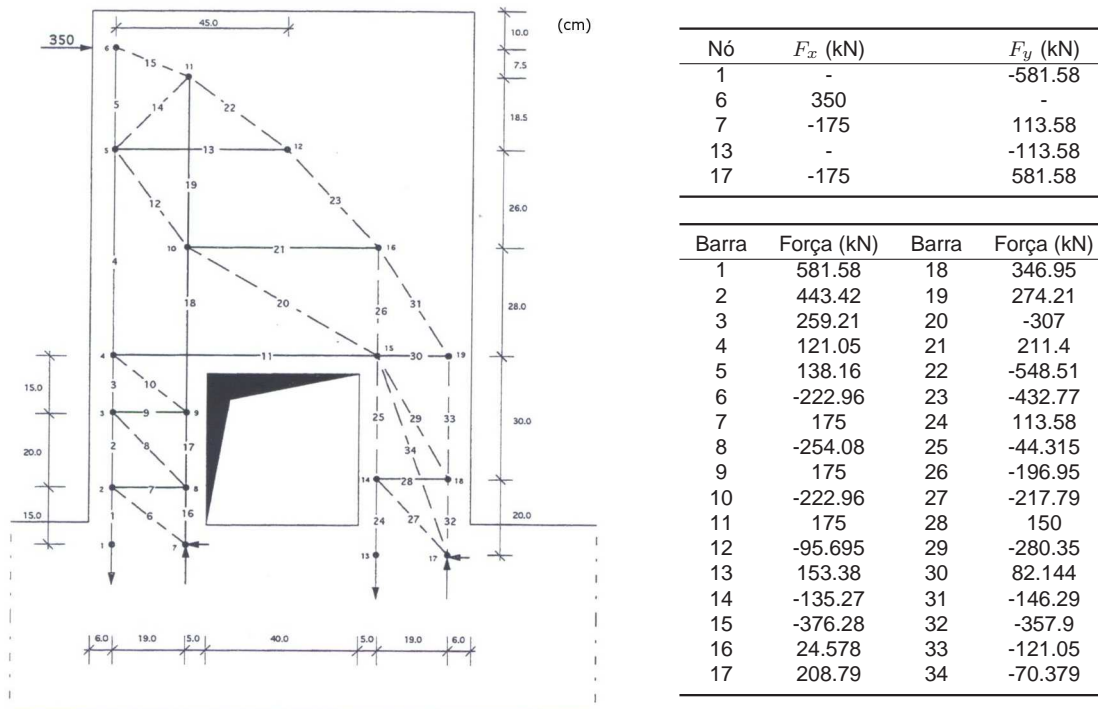


Figura 3.5: Modelo de treliça do modelo experimental MB1ee e esforços axiais do cálculo estático (adaptado de [10]).

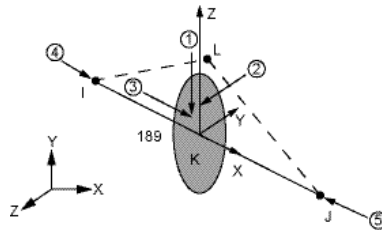
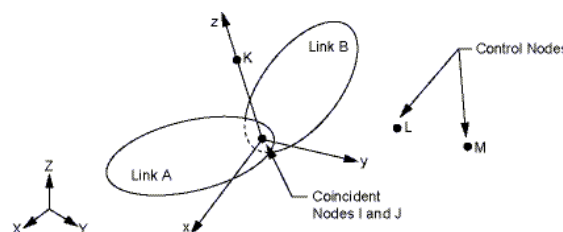


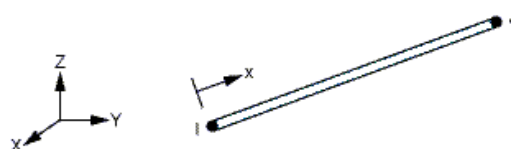
Figura 3.6: Elemento *BEAM189* [27].

Para dissipar os momentos flectores na estrutura foram inseridos elementos para simular rótulas (*COMBIN7*, figura 3.7). Para inserir estes elementos seria necessário adicionar nós fora do plano da estrutura de forma a definir o eixo de rotação da mesma. Deste modo, o processo torna-se muito complexo, o que levou a abandonar a utilização de elementos tipo viga, uma vez que se pretendia desenvolver uma metodologia de modelação simples.

A adopção do elemento do tipo *LINK180* figura 3.8, foi outra abordagem estudada para desenvolver os vários modelos numéricos. Este elemento possui dois nós com três graus de liberdades em cada nó e permite adoptar propriedades de não linearidade. A adopção deste elemento permite simular bem estruturas reticuladas pois apenas fica sujeito a compressão e tracção uniaxial. Para a definição correcta do elemento tem que ser definida uma dada secção e atribuir as propriedades do material. No entanto, este tipo de elemento não permite considerar duas entidades de materiais diferentes para

Figura 3.7: Elemento *COMBIN7* [27].

o mesmo elemento, ou seja, para o caso em estudo não seria possível considerar as propriedades do aço e do betão para o mesmo elemento.

Figura 3.8: Elemento *LINK180* [27].

Uma solução inicial para resolver este obstáculo foi considerar duas treliças paralelas entre si, onde uma treliça possuía as propriedades do aço e a outra as do betão. Todos os nós de uma estrutura estavam restringidos pelos nós correspondentes da outra estrutura, com a finalidade de que ambas as estruturas tivessem as mesmas deformações. No entanto, a impossibilidade de atribuir as propriedades do betão à compressão e à tracção, que representa a curva completa do betão, ao mesmo elemento revelou-se um problema. Pois, no decorrer da análise numérica, o *Ansys* não teve capacidade de reconhecer qual comportamento que o material deve adoptar para cada elemento, à tracção ou à compressão, no caso do betão. No caso do aço, não surge este problema, uma vez que este material tem um comportamento idêntico tanto à tracção como à compressão. Apenas com a introdução de comandos em APDL seria possível contornar este problema, visto que para cada incremento de carga o *Ansys* iria verificar as tensões instaladas em cada elemento da treliça de betão, atribuindo as propriedades do material adequado ao estado de tensão presente em cada elemento. Mais uma vez, esta abordagem foi abandonada, devido à complexidade a nível de programação.

Por fim, adoptou-se o elemento do tipo *LINK180*, desenvolvendo-se apenas uma treliça, em que se atribuiu aos materiais as propriedades do betão e do aço combinadas, no caso de elementos traccionados. Em elementos sujeitos à compressão apenas se considera a contribuição do betão, desconsiderando-se a contribuição do aço. A combinação das relações constitutivas de cada material depende de alguns factores, tais como a secção do betão, a quantidade de armadura e a respectiva classe do betão e do aço. Este método foi o adoptado para a realização deste estudo, uma vez que se trata de um processo simples e engloba as propriedades não lineares dos materiais.

Material Não Linear Ansys

Através da análise elástica feita para o modelo MB1ee, saber-se-á quais os elementos barra que definem os tirantes e as escoras. Para cada elemento barra, é conhecido o esforço axial.

Para o elemento sujeito à compressão adopta-se apenas a lei do betão à compressão. A lei constitutiva do betão à compressão será modelada por uma curva multilinear MISO, considerada pela relação da secção 2.4.1 (figura 2.9 b, página 14). O troço descendente após atingido o valor máximo de compressão, será substituído por um patamar horizontal, pois o Ansys não permite considerar declives negativos, logo, a tensão máxima é considerada constante até à extensão de rotura à compressão ($\varepsilon_u=3.5\%$). Quanto a modelação do aço, observa-se na tabela 3.3, as propriedades do aço adoptadas.

Tabela 3.3: Propriedades do aço considerado para as modelações numéricas.

A500NR			
Ductilidade	Classe B	k	1.10
ε_{sy}	2.5‰	f_y (MPa)	500
ε_u	6.75%	f_{tk} (MPa)	550

Para cada elemento traccionado, considera-se um tirante de betão armado. O autor decide modelar, no caso de um tirante de betão armado, tendo em conta as leis constitutivas do betão à tracção e do aço. Para modelar o tirante de betão armado, foi feita uma sobreposição da relação constitutiva de betão à tracção com o modelo bilinear do aço visto na secção 2.4.2 (figura 2.11 b, página 16).

De seguida, apresenta-se um exemplo do desenvolvimento feito da nova relação constitutiva de um tirante de betão armado.

Na tabela 3.4, apresenta-se a quantidade de armadura adoptada para o MET do modelo MB1ee de Filho. Através dos esforços estáticos obtidos, determina-se a área com recurso à equação 2.2 vista na secção 2.2.3 (página 8).

Tabela 3.4: Armaduras do modelo MB1ee experimental.

Tirante	Força (kN)	A_s (cm ²)	Armadura adoptada	Tirante	Força (kN)	A_s (cm ²)	Armadura adoptada
1	581.58	10.57	4 ϕ 16 + 2 ϕ 10	16	24.58	0.45	2 ϕ 6
2	443.42	8.06	4 ϕ 16	17	208.79	3.8	2 ϕ 16
3	259.21	4.71	4 ϕ 16 + 2 ϕ 10	18	346.95	6.31	3 ϕ 16
4	121.05	2.2	2 ϕ 16	19	274.21	4.99	3 ϕ 16
5	138.16	2.51	2 ϕ 16	21	211.40	3.84	2 ϕ 8//8
7	175.00	3.18	2 ϕ 8//5	24	113.58	2.07	2 ϕ 10
9	175.00	3.18	2 ϕ 8//5	28	150.00	2.73	2 \times 2 ϕ 6 + \times 2 ϕ 8
11	175.00	3.18	2 ϕ 10 + 4 ϕ 8	30	82.14	1.49	2 ϕ 10
13	153.38	2.79	2 ϕ 8//11	-	-	-	-

Tomemos, por exemplo, o tirante 1 com esforço axial 581.58 kN, que necessita de uma área de armadura de 10.57 cm². Numa folha de cálculo, elaborou-se o comportamento do betão à tracção através da expressão 2.12 e para o aço considera-se o modelo bilinear. De referir que durante as modelações foram adoptadas apenas duas secções

diferentes, nomeadamente, uma secção para as escoras e outra para os tirantes. A adopção de apenas duas secções permitiu tornar simples a modelação.

Tabela 3.5: Propriedades geométricas e materiais do tirante 1.

Propriedade do betão		Propriedade do aço	
Espessura (m)	0.12	A_{req} (cm ²)	10.57
Largura (m)	0.15	Extensão de cedência (ε_{sy})	2.5‰
Área de betão (m ²)	0.018	Extensão última (ε_u)	6.75‰

Tendo em conta o diagrama tensão-deformação de cada material (figura 3.9), ter-se-á que fazer uma combinação de ambos os materiais para obter a relação tensão-deformação do betão armado à tracção. Para tal, sabendo as dimensões das secções do betão e do aço é possível transformar a relação tensão-deformação para força-deformação multiplicando a tensão de cada material pela respectiva área. Deste modo, fazendo o somatório das forças dos dois materiais e dividindo pela correspondente secção total do tirante, que corresponde à de betão, obtém-se a relação tensão-deformação do betão armado para o tirante 1. Na expressão 3.1 ilustra-se genericamente como se determina a tensão do betão armado, fazendo a combinação de ambos os materiais para a mesma deformação.

$$\begin{cases} F_a = \sigma_a \times A_a \\ F_b = \sigma_b \times A_b \end{cases} \Rightarrow \sigma_{ba} = \frac{F_b + F_a}{A_b} \quad (3.1)$$

Repetiu-se o mesmo procedimento para toda a gama das extensões, de forma a modelar o material de betão armado. Na figura 3.9 (c) é possível visualizar a relação tensão-deformação desse tirante. Como foi adoptado um modelo bilinear do aço, existe depois da cedência do aço um ligeiro declive que permite simular a fase de endurecimento do aço. Este processo foi repetido para todos os tirantes existentes na estrutura.

Observa-se ainda o efeito de *tension-stiffening* (secção 2.4.3), sendo que, quando se dá início à fendilhação existe uma perda de rigidez no elemento. Porém, como referido para a modelação do betão à compressão, nota-se que, após surgir a fendilhação do betão, existe uma queda repentina da tensão do elemento. Como o *Ansys* não considera declives negativos, o que foi feito para ultrapassar este obstáculo foi igualar as tensões que tivessem menor valor que a tensão de fendilhação, até surgir uma tensão superior à de fendilhação. Com o aumento da tensão, atingiu-se um patamar de cedência, onde a partir deste ponto, o material mais resistente é o aço, pois a resistência do betão que contribui para o tirante é relativamente baixa comparado com a do aço.

Definida a relação tensão-deformação do betão armado, será necessário modelar o material no *Ansys*. Para tal, será necessário modelar o material dividido em regime elástico e não linear. Para o regime elástico, considera-se um módulo de elasticidade (E_{ba}) que varia consoante o elemento a atribuir e admite-se um comportamento isotrópico onde se considera um coeficiente de Poisson (ν) de 0.25, sendo o valor médio entre os coeficientes do betão ($\nu_b=0.2$) e do aço ($\nu_a=0.3$). Ultrapassado o regime elástico, considera-se uma curva MISO descrevendo o comportamento dos tirantes de betão

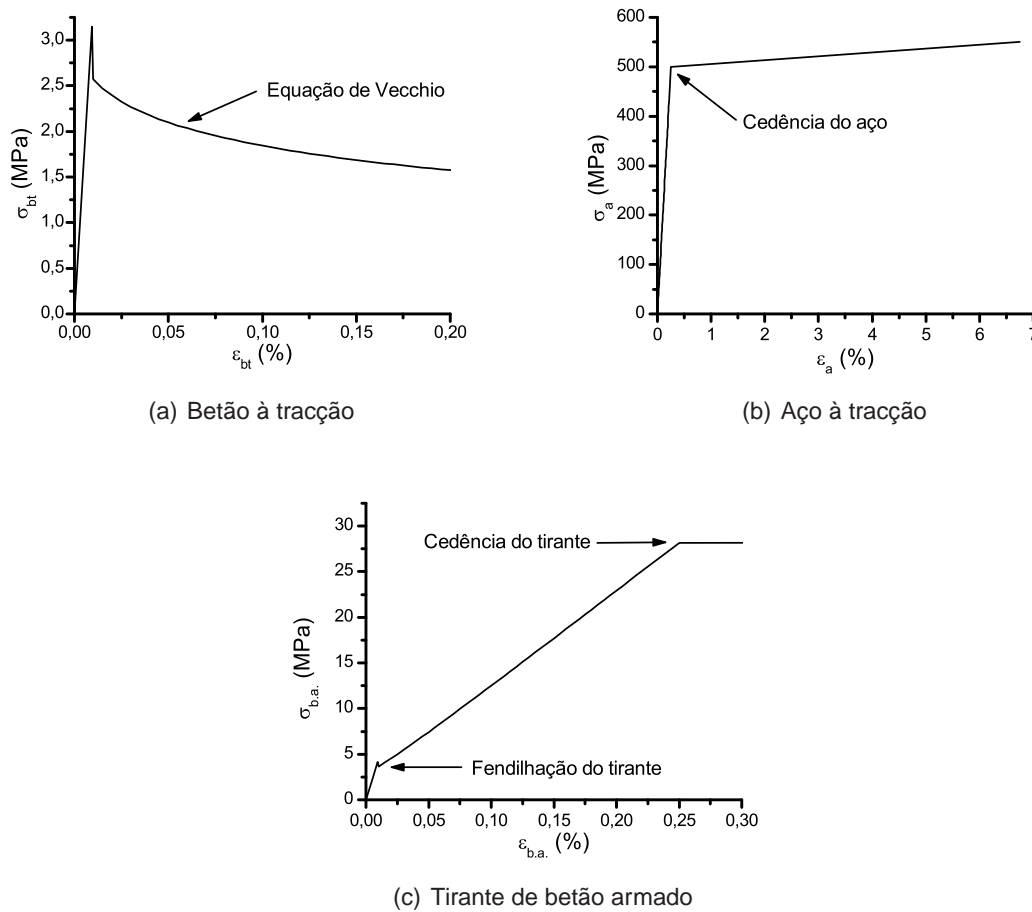


Figura 3.9: Relação tensão-deformação do betão, do aço e de betão armado.

armado. Para cada elemento foi atribuído uma entidade de material diferente à excepção de elementos que exigissem as mesmas quantidades de armadura. Para casos onde o tirante necessite de baixas quantidades de armaduras, obtinha-se uma relação tensão-deformação do betão armado muito semelhante do betão à tracção. Tendo, então, um declive negativo desde do início da fendilhação, considerou-se, deste modo, o maior valor de tensão constante, desde da sua extensão de fendilhação até a extensão de rotura. No anexo C, é possível visualizar o *script* usado para inserir a propriedade material de cada elemento.

Perante as descrições feitas para a modelação do material não linear, estão reunidos os requisitos para aplicar as condições de fronteira e definir o tipo de análise a realizar. Assim, é aplicado uma carga concentrada ($F=500\text{kN}$) no nó correspondente ao ponto de aplicação do carregamento e são restringidos os deslocamentos nos nós que representam os apoios fixos da estrutura (figura 3.10).

Para o modelo numérico MB1ee-MEF, adopta-se uma análise tipo estática não linear, onde o incremento de carga considerado foi 1/100 da força aplicada. No entanto, nas opções não lineares do *Ansys*, foi activado o passo automático dando um intervalo

máximo de incremento 1/500 e um mínimo 1/10. A figura 3.10 permite observar o modelo MB1ee-MEF modelado em *Ansys*, com a carga aplicada e seus apoios fixos. Também é possível verificar que a treliça tem a mesma geometria do MET que Filho adoptou para o modelo MB1ee-EXP.

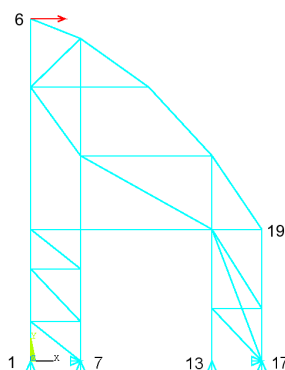


Figura 3.10: Modelo numérico da treliça para MB1ee e localização dos nós.

Resultados do Modelo MB1ee

Para avaliar a convergência da solução, foram testadas várias combinações dos parâmetros para a definição da análise não linear pelo *Ansys* [27]. Para esse fim, testou-se com a teoria dos pequenos e dos grandes deslocamentos onde se fazia variar os seguintes parâmetros: activação de passo automático, número de incrementos, número máximo e mínimo de incrementos possíveis. Os resultados que se seguem são aqueles que tiveram menos registos nos passos de carga com uma aproximação satisfatória. Para os modelos estudados numericamente foram sempre utilizados os mesmos parâmetros da análise, ou seja, activa-se o passo automático, adoptou-se a teoria dos pequenos deslocamentos, e define-se o número, o máximo e o mínimo de incrementos possíveis que foram respectivamente 100, 500 e 1. Selecciona-se ainda uma opção para que o programa durante a análise registasse todos os resultados para cada incremento de carga.

Apresentar-se-á de seguida a simulação do comportamento da estrutura até ao seu colapso, através desta análise é possível identificar os tirantes onde surge a fendilhação e ainda identifica-se quais os elementos que são levados à rotura. No entanto, para se proceder da seguinte maneira, será necessário avaliar em qual dos passos de carga tinha sido alcançado a extensão de fendilhação e quais os elementos que atingiram a extensão última ($\varepsilon_u = 6.75\%$). No caso da extensão última foi preciso fazer o somatório das extensões elásticas equivalentes (ε_{eq}^{el}) com as extensões plásticas equivalentes (ε_{eq}^{pl}) para cada elemento. Isto deve-se ao facto, de ter sido ultrapassado o regime elástico pois já existe elementos fendilhados, estando então em regime não linear. Na equação 3.2, observa-se o somatório das extensões referidas no qual dão origem às extensões totais no elemento (ε_{eq}^{total}). Procura-se então determinar em que incremento de carga as extensões totais no elemento eram superiores à extensão última.

$$\varepsilon_{eq}^{total} = \varepsilon_{eq}^{el} + \varepsilon_{eq}^{pl} \quad (3.2)$$

No pós-processamento avaliou-se, os incrementos de carga para identificar em que passo de carga tinha sido excedido a extensão última para todos os elementos. Verificou-se que houve rotura do tirante 18 no passo de carga 416 kN. A figura 3.11 apresenta a relação força-deslocamento do MB1ee-MEF em comparação com os resultados experimentais MB1ee-EXP. Os nós seleccionados para descrever os deslocamentos da estrutura foram os nós 6 e 19, pois, no ensaio experimental, era nessa mesma zona que se encontravam os extensómetros.

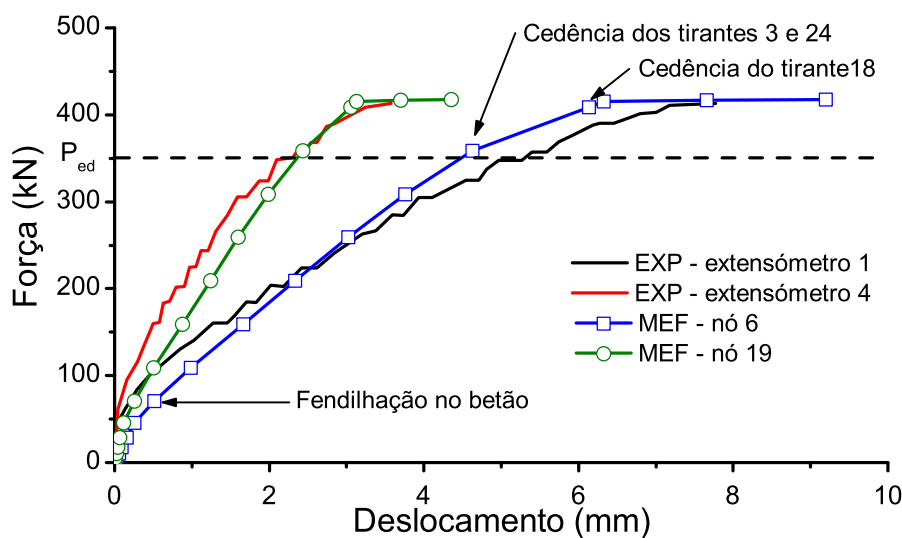


Figura 3.11: Relação força-deslocamento dos modelos MB1ee-EXP e MB1ee-MEF.

Analisando as duas curvas experimentais associadas aos extensómetros 1 e 4 do ensaio de Filho, as outras duas curvas correspondem ao deslocamento horizontal dos nós 6 e 19 do modelo MEF, observando-se que o modelo EXP atingiu uma carga de rotura (P_u) de 413 kN enquanto o modelo MEF atinge os 83% da carga total aplicada, ou seja, o colapso é atingido aproximadamente aos 416 kN. De certo modo, a estrutura conseguiu resistir para a carga de dimensionamento adoptada ($P_{ed}=350$ kN). Nas curvas dos extensómetros 1 e 4, a existência de pequenos troços rectos horizontais (tensão constante e aumento do deslocamento) ilustra a ocorrência de fendilhação no elemento estrutural. Assim, consegue-se visualizar que, em termos de deslocamento, o modelo MEF tem um comportamento bastante semelhante ao EXP. No início da aplicação da carga, verifica-se que os deslocamentos de ambos os nós (6 e 19) são ligeiramente maiores que os experimentais, mas isto apenas se observa até ser atingida aproximadamente metade da carga aplicada. Focando apenas o nó 6, onde existe uma maior variação no seu declive, observa-se que aproximadamente a partir dos 360 kN surge uma variação do declive. Isto deve-se ao facto de algum elemento ter atingido o estado de cedência, deixando de estar no regime elástico. Com o aumento da carga, começa-se a ter mais deslocamentos para apenas um incremento pequeno da carga,

logo, a estrutura está prestes a atingir o colapso.

Apresenta-se, de seguida, um historial do comportamento da estrutura até ao colapso. A extensão de fendilhação para o tirante de betão armado é 0.0892‰ e foi obtida através da lei de Hooke (equação 3.3),

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.3)$$

onde σ é a tensão média de tracção do betão ($f_{ctm}=3.0$ MPa) e E o seu módulo de elasticidade, que para a devida classe adoptada toma o valor de 31.0 MPa [1]. Para determinar a extensão de fendilhação, seria necessário na análise de resultados identificar onde e em que passo da carga era excedido essa extensão. Para proceder deste modo, tinha de ser seleccionado o passo de carga a analisar e observar as extensões elásticas (ε_{eq}^{el}) para todos os elementos manualmente no GUI do programa.

Para uma carga de 70 kN verificou-se que é excedida a extensão de fendilhação no tirante 1 e 2 (figura 3.12 a); de seguida, no próximo passo de carga, surge uma suposta fendilhação na zona superior do pilarete esquerdo (figura 3.12 b). Ao aumentar a carga para 158 kN, surgem mais elementos fendilhados no topo da estrutura e no pilarete direito (figura 3.12 c). Neste modelo, as deformações do betão à compressão não chegaram a exceder a extensão limite à compressão, logo, não há rotura por compressão.

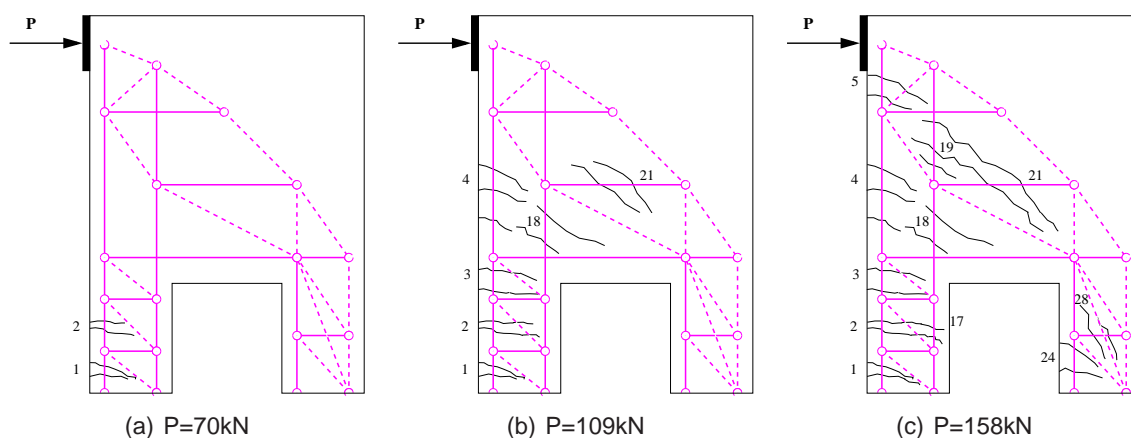


Figura 3.12: Evolução da fendilhação do modelo MB1ee-MEF.

Na figura 3.13, apresenta-se um esquema com o historial da evolução da fendilhação de ambos os modelos. No modelo EXP pode observar-se que a fendilhação surge, em primeiro lugar, no topo do pilarete esquerdo com uma orientação horizontal, para uma carga de 100 kN. Com o incremento da carga, observa-se uma propagação das fendas a convergiem para a escora principal, paralelas ao seu eixo. No modelo MEF, verifica-se, para uma carga de 70 kN, o aparecimento das primeiras fendas localizadas no pilarete esquerdo. Nos seguintes passos de carga, começam a formar-se fendas na vizinhança da escora principal. Ao comparar-se o forma da evolução da fendilhação pode verificar-se que quer no MEF quer no EXP as fendas seguem a mesma disposição para o MET adoptado. Assim, o modelo numérico considerado com as propriedades não lineares

dos materiais, aproxima-se do comportamento real da estrutura.

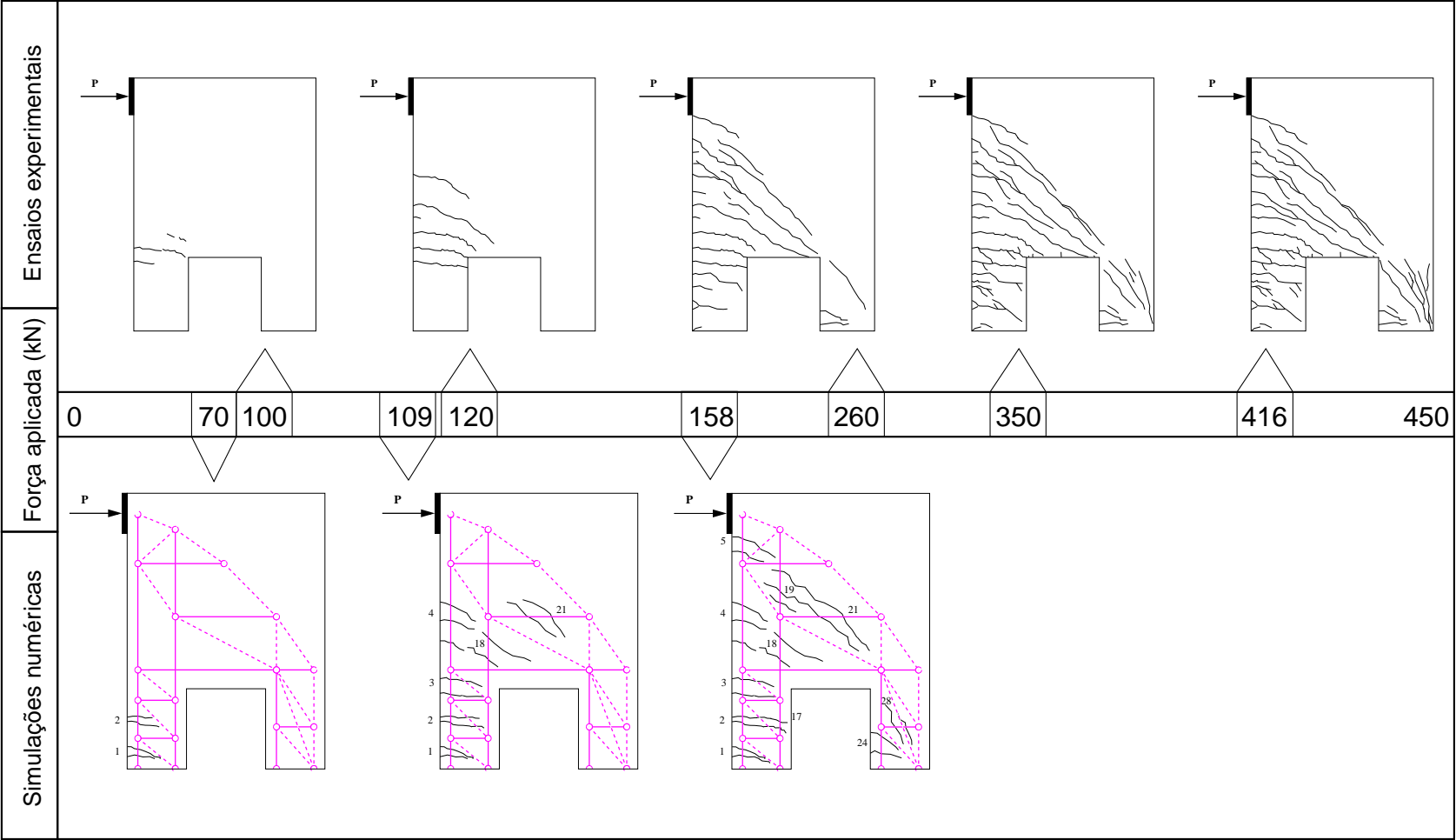


Figura 3.13: Cronograma da fendilhação nos modelos MB1ee-EXP e MB1ee-MEF.

Na tabela 3.6, apresentam-se os valores EXP e MEF do modelo MB1ee, que correspondem às cargas e deslocamentos máximos tal como as suas relações entre os modelos. Deste modo, P_{cr} corresponde à carga crítica, P_u representa a carga última e $\delta_{máx}$ equivale ao deslocamento máximo.

Tabela 3.6: Valores experimentais e numéricos do modelo MB1ee correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.

Modelo	P_{cr} (kN)	P_u (kN)	P_{cr}/P_u	P_u/P_{ed}	$\delta_{máx}$ (mm)
EXP	100	413	0.24	1.18	7.57
MEF	70	416	0.17	1.19	9.19
MEF/EXP	0.70	1.01	-	-	1.21

Através da observação da tabela, pode afirmar-se que a primeira fenda se inicia no MEF para um valor de carga inferior ao EXP. Ao avaliar-se a carga última, verifica-se no MEF valores superiores ao EXP, verificando uma diferença de aproximadamente 1%. No que toca ao deslocamento máximo, que corresponde ao nó 6 e ao extensómetro 4 dos modelos MEF e EXP, respectivamente, obteve-se uma satisfatória aproximação registando uma diferença de 1.64 mm.

Em sequência da comparação realizada dos dois modelos, constata-se que os resultados foram satisfatórios quer a nível da resistência do modelo quer a nível da evolução da fendilhação.

Note-se que, sendo o modelo MEF uma treliça, esta possui uma maior flexibilidade quando comparado com o modelo EXP. Deste modo, é de esperar que o modelo EXP consegue mobilizar mais deslocamentos por ser uma estrutura rígida, resultando desta forma menos deslocamentos quando comparado com o modelo MEF.

3.2.2 Modelo MB2ee

Neste modelo, Filho pretendeu que a transmissão das cargas ocorresse nos tirantes transversais (figura 3.3 b). Para tal, usou-se o MET apresentado na figura 3.14. A carga é transmitida até ao topo do tirante principal e, sequencialmente, o pilarete esquerdo fica traccionado. Por sua vez, o pilarete direito fica sujeito à compressão. Filho refere ainda que este modelo será sujeito a fendas de maiores dimensões devido à ausência de tirantes na zona entre o pilarete esquerdo e o ponto de aplicação da carga.

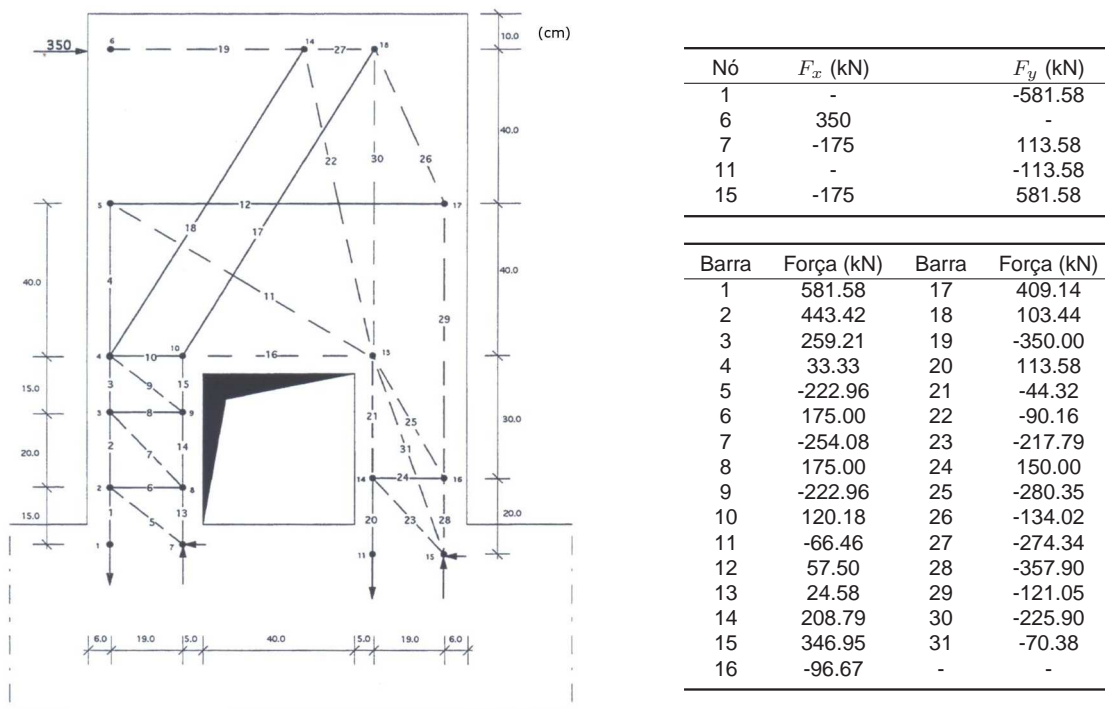


Figura 3.14: Modelo de treliça do modelo experimental MB2ee e esforços axiais do cálculo estático [10].

Os parâmetros da análise não linear foram os mesmos do modelo MB1ee-MEF. A escora que faz, a ligação da carga aplicada até ao tirante principal não foi considerada na modelação pois a sua contribuição em relação aos outros elementos existentes é mínima.

Na figura 3.15, apresenta-se a geometria do modelo numérico utilizado no *Ansys*, que tem o mesmo MET do modelo MB3ee adoptado por Filho.

Após a análise, observa-se o comportamento do deslocamento nos nós 10 e 16. Os extensómetros usados do modelo EXP foram o extensómetro 1, que se localiza no topo da estrutura e será comparado com o nó 10 do modelo MEF, e o extensómetro 3 situado no topo do pilarete esquerdo, que será comparado directamente com o nó 16.

Como se pode observar na figura 3.16, o resultado desta modelação não foi tão satisfatório como se tinha visto para o modelo MB1ee-MEF. As curvas do modelo MEF

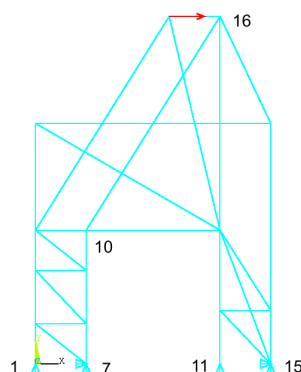


Figura 3.15: Modelo de treliça numérica para modelo MB2ee.

Tabela 3.7: Armaduras do modelo MB2ee-EXP.

Tirante	Força (kN)	A_s (cm ²)	Armadura adoptada	Tirante	Força (kN)	A_s (cm ²)	Armadura adoptada
1	581.58	10.75	4 ϕ 16 + 2 ϕ 10	13	24.58	0.45	2 ϕ 6
2	443.42	8.06	4 ϕ 16	14	208.79	3.8	2 ϕ 16
3	259.21	4.71	2 ϕ 16 + 2 ϕ 10	15	346.95	6.31	3 ϕ 16
4	33.33	0.61	2 ϕ 10	17	409.16	7.44	3 ϕ 16
6	175.00	3.18	2 ϕ 8//5	18	103.44	1.88	2 ϕ 8//8
8	175.00	3.18	2 ϕ 8//5	20	113.58	2.07	2 ϕ 10
10	120.18	2.19	2 ϕ 12 + 1 ϕ 6	24	150.00	2.73	2 \times 2 ϕ 6 + \times 2 ϕ 8
12	57.50	1.05	2 \times 2 ϕ 16				

ficam, em todo o carregamento, abaixo do ensaio experimental. Com o aumento da carga, atinge-se a primeira fendilhação para um valor de 46 kN, enquanto no modelo EXP as primeiras fendas surgem apenas aos 120 kN. Nesta modelação, existe um tirante que atinge a extensão última dando por terminada a análise, na carga 382 kN. De qualquer forma, este modelo consegue resistir à carga na qual foi dimensionada. Trata-se de um valor muito inferior, com uma diferença de 32 kN a mais da carga de dimensionamento, enquanto, para o modelo EXP, ainda resistiu mais de 100 kN.

Na tabela 3.8, encontram-se os valores quanto à carga de fendilhação, carga última e deslocamento máximo para ambos os modelos. Quanto ao deslocamento, o modelo MEF obteve um deslocamento inferior (11.41mm) comparado com os 14.28 mm do modelo EXP. Isto deve-se ao facto de a análise ter terminado quando foi atingida a rotura no tirante 3, pois, a partir desse passo de carga, a estrutura continua a sofrer deslocamentos sem ser necessário o incremento da força.

Apresenta-se na figura 3.17 a evolução da fendilhação nos tirantes. O tirante 1 é o

Tabela 3.8: Valores experimentais e numéricos do modelo MB2ee correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.

Modelo	P_{cr} (kN)	P_u (kN)	P_{cr}/P_u	P_u/P_{ed}	$\delta_{máx}$ (mm)
EXP	120	450	0.27	1.29	14.28
MEF	46	382	0.12	1.09	11.41
MEF/EXP	0.38	0.85	-	-	0.80

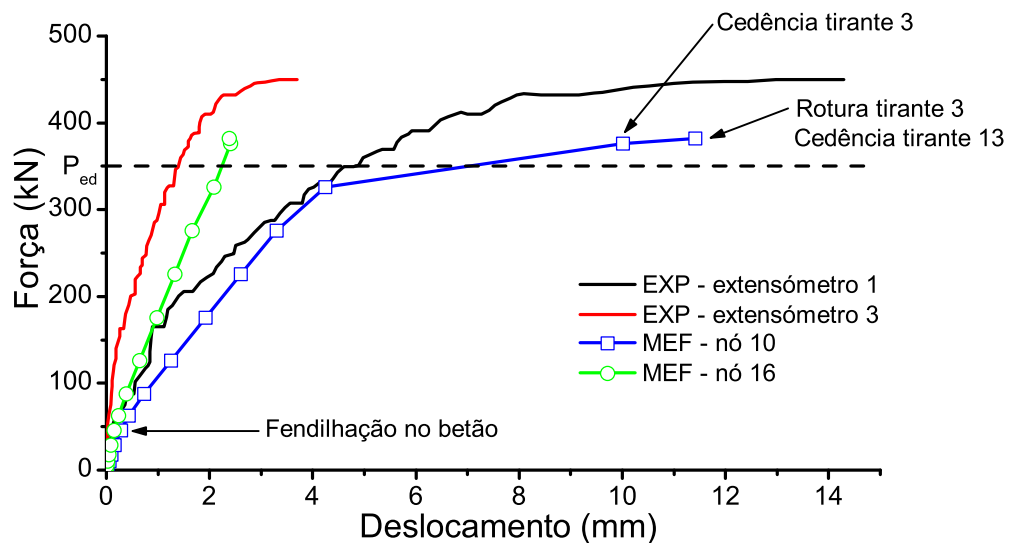


Figura 3.16: Diagrama força-deslocamento dos modelos MB2ee-EXP e MB2ee-MEF.

primeiro a fendilhar para uma carga relativamente baixa em relação ao modelo EXP. Com o aumento da carga, observa-se uma evolução de fendilhação ascendente ao pilarete esquerdo; quando é atingida uma carga de 126 kN, os tirantes principais 18 e 17 já se encontram fendilhados, assim como alguns elementos do pilarete direito.

Para comparar o modelo MEF com o modelo EXP, temos, na figura 3.18, um esquema geral da evolução de fendilhação do modelo EXP. O comportamento do modelo MEF segue o mesmo padrão que o o modelo EXP, mas para cargas inferiores. Note-se que o modelo EXP chegou ao colapso devido à cedência das armaduras dos tirantes principais transversais e à rotura na escora transversal do pilarete direito. A ausência de tirantes entre o ponto de aplicação da carga e o pilarete esquerdo e a presença de tirantes transversais na escora principal, tornou a estrutura mais resistente e susceptível a maiores deslocamentos comparada com o modelo MB1ee.

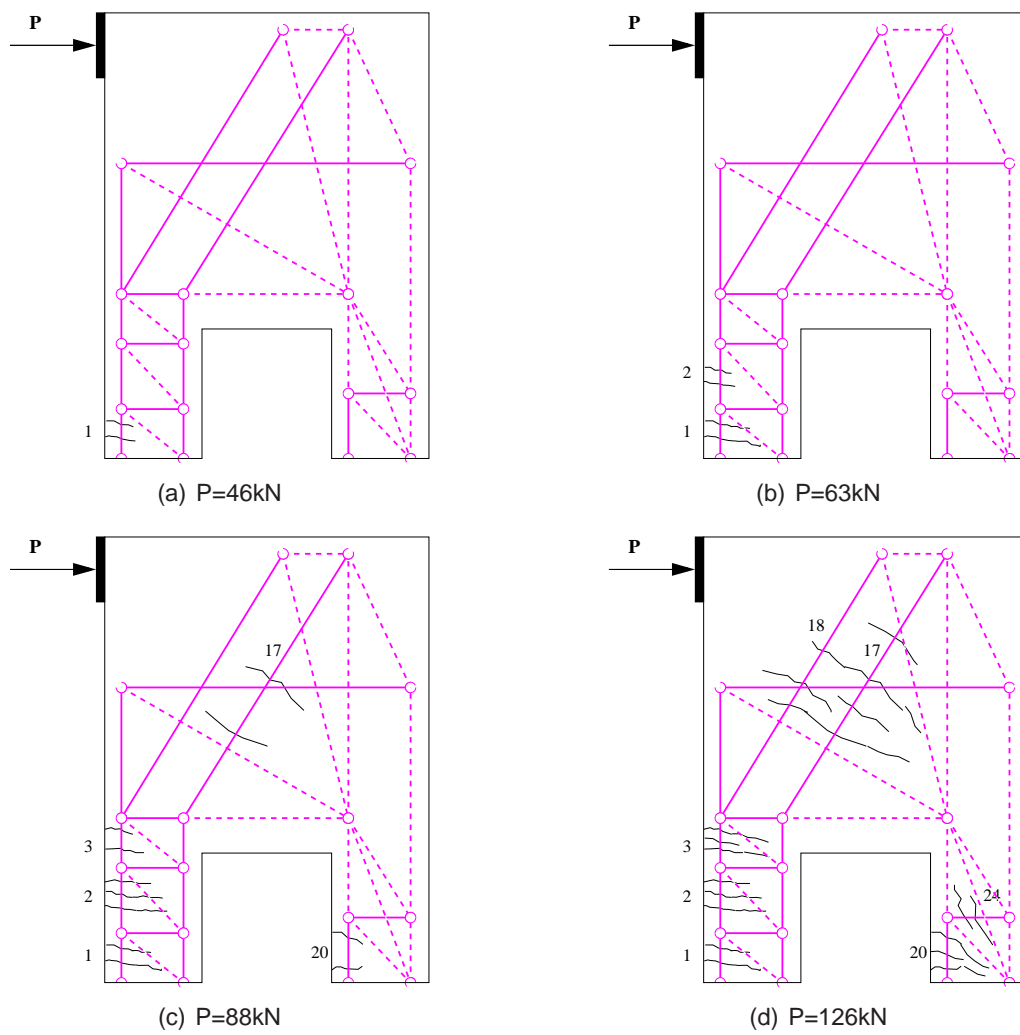


Figura 3.17: Evolução da fendilhação do modelo MB2ee-MEF.

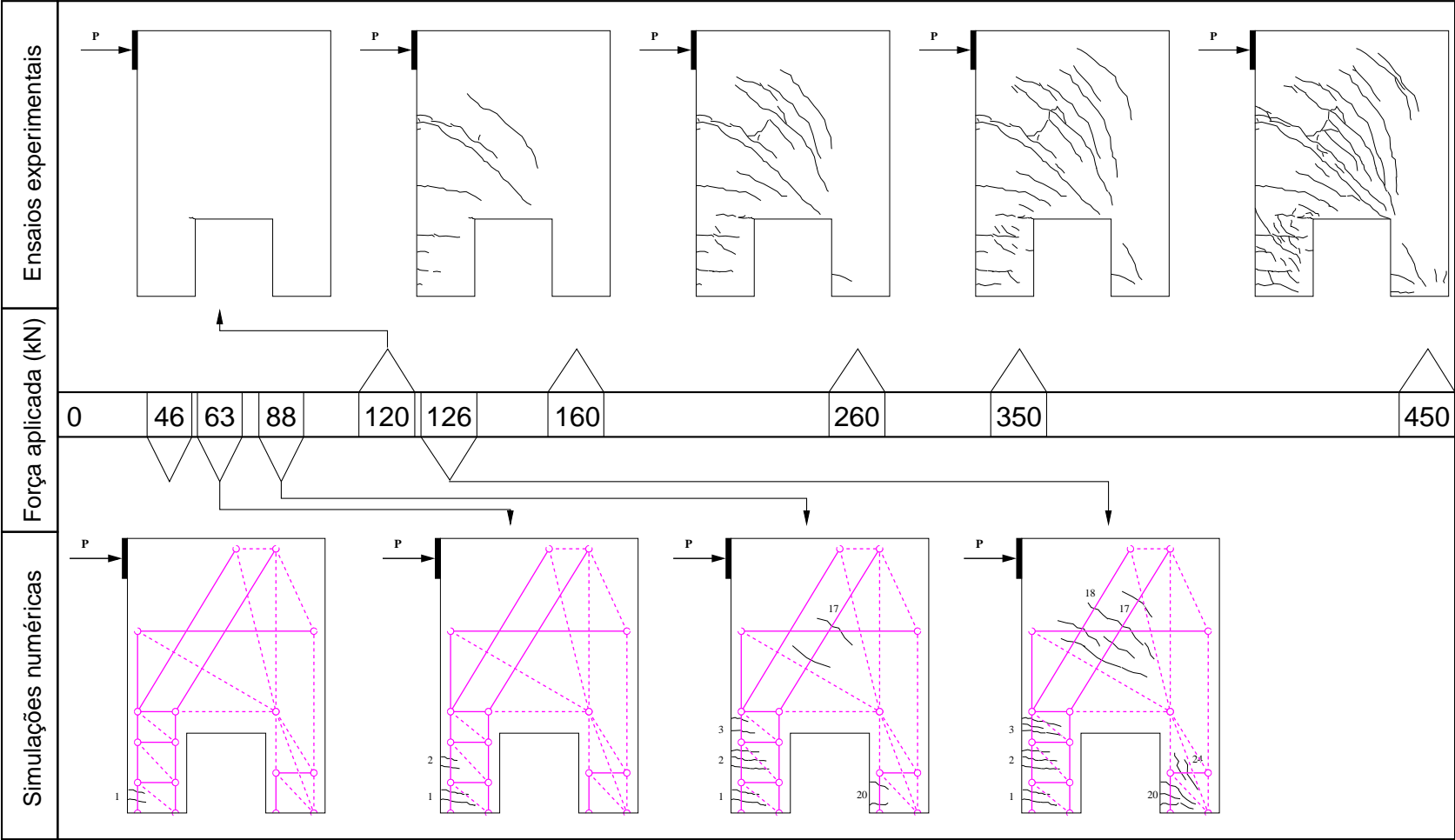


Figura 3.18: Cronograma da fendilhação nos modelos MB2ee-EXP e MB2ee-MEF.

3.2.3 Modelo MB3ee

O último modelo de estudo para validação é o resultado da sobreposição dos dois modelos mencionados (MB1ee e MB2ee). Refere-se de novo que o modelo MB1ee resiste a uma carga através de uma escora principal, enquanto no modelo MB2ee ocorre precisamente o contrário, uma vez que este resiste através de um conjunto de tirantes transversais.

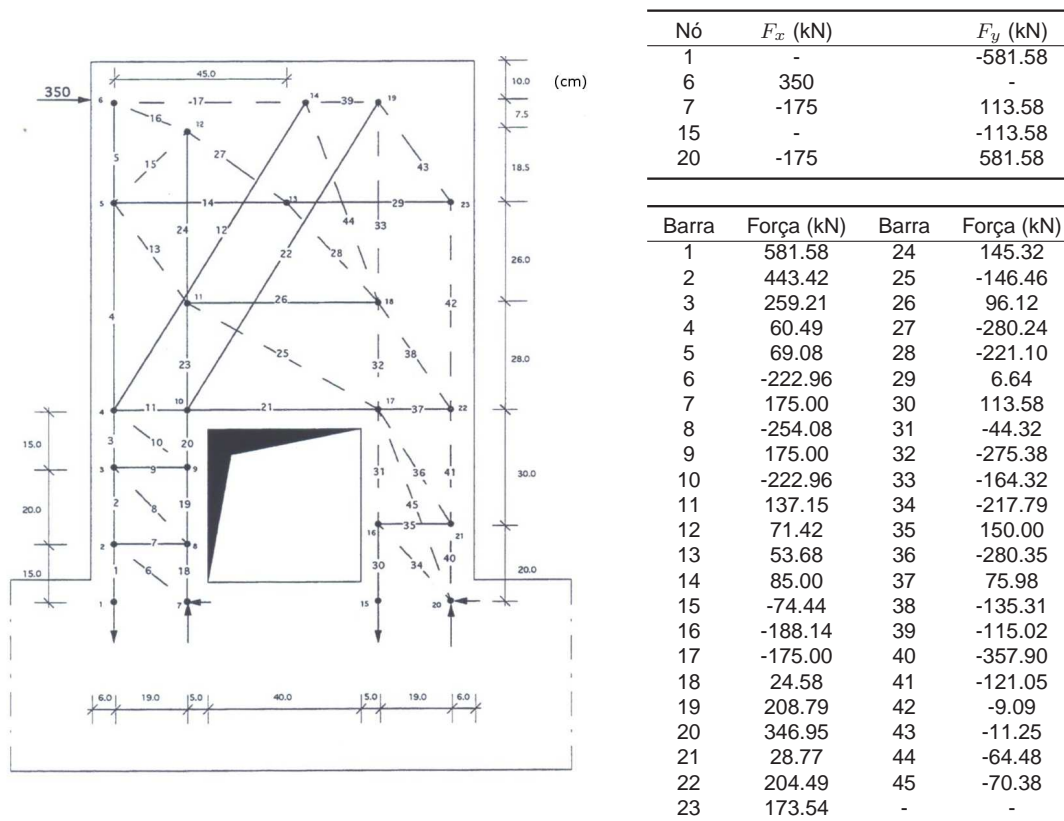


Figura 3.19: Modelo de treliça do modelo experimental MB3ee e esforços axiais do cálculo estático [10].

Avaliamos, então, os resultados obtidos, da modelação. Os parâmetros da análise não linear foram os mesmos do modelo MB1ee-MEF.

Mais uma vez, apresenta-se o modelo numérico MB3ee utilizando no *Ansys* (figura 3.19).

Após a análise observa-se, o comportamento do deslocamento nos nós 11 e 19 comparativamente aos extensómetros 1 e 4. Verificou-se que este MET sugerido por Filho é o mais resistente em termos de carga última e deslocamentos. O mesmo se verificou para o modelo MEF, onde foi possível atingir uma carga superior em relação aos outros modelos previamente analisados (MB1ee-MEF e MB2ee-MEF).

Os resultados desta modelação tiveram um comportamento semelhante aos do modelo experimental, como se pode observar na figura 3.21. As curvas do modelo MEF conseguem acompanhar bem as curvas EXP com o aumento do carregamento da

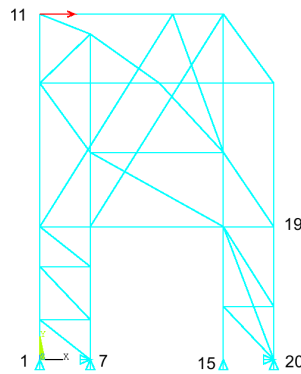


Figura 3.20: Modelo de treliça numérico para modelo MB3ee.

Tabela 3.9: Armaduras do modelo MB3ee-EXP.

Tirante	Força (kN)	A_s (cm ²)	Armadura adoptada	Tirante	Força (kN)	A_s (cm ²)	Armadura adoptada
1	581.58	10.75	4 ϕ 16 + 2 ϕ 10	19	208.79	3.80	2 ϕ 6
2	443.42	8.06	4 ϕ 16	20	346.95	6.31	2 ϕ 16 + 3 ϕ 10
3	259.21	4.71	2 ϕ 16 + 2 ϕ 10	21	28.77	0.52	2 ϕ 10
4	60.40	1.10	2 ϕ 10	22	204.49	3.72	4 ϕ 12
5	69.08	1.26	2 ϕ 10	23	173.54	3.16	2 ϕ 16
7	175.00	3.18	2 ϕ 8//5	24	145.32	2.64	2 ϕ 16
9	175.00	3.18	2 ϕ 8//5	26	96.12	1.75	2 ϕ 6//9
11	137.15	2.49	4 ϕ 10	29	6.64	0.12	2 ϕ 6
12	71.42	1.30	2 ϕ 10	30	113.58	2.07	2 ϕ 10
14	85.00	1.55	2 ϕ 8//14.5	35	150.00	2.73	2 \times 2 ϕ 6 + 2 \times 2 ϕ 8
18	24.58	0.45	4 ϕ 6	37	75.98	1.38	2 ϕ 10

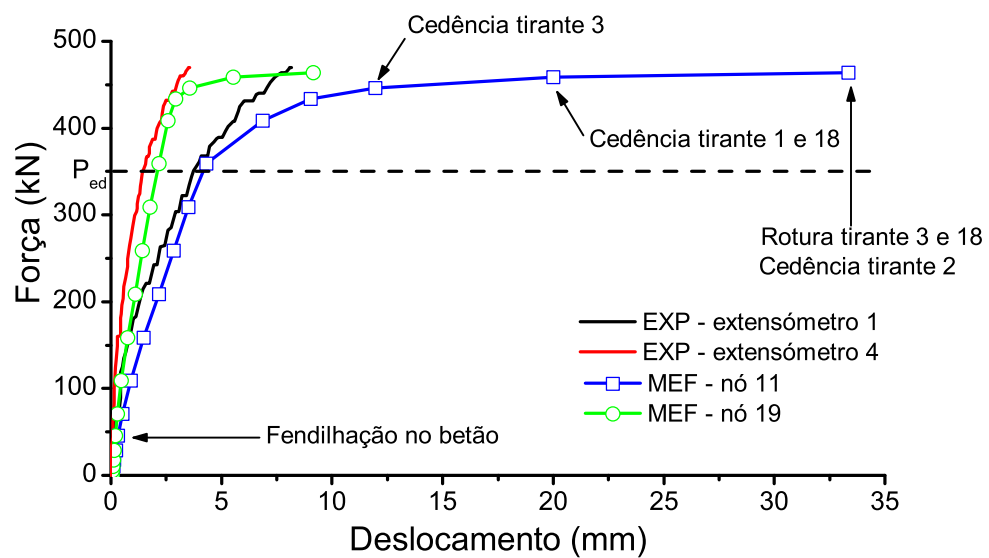


Figura 3.21: Diagrama força-deslocamento dos modelos MB3ee-EXP e MB3ee-MEF.

estrutura, até começar a surgir um aumento significativo dos deslocamentos.

Tabela 3.10: Valores experimentais e numéricos do modelo MB3ee correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.

Modelo	P_{cr} (kN)	P_u (kN)	P_{cr}/P_u	P_u/P_{ed}	$\delta_{máx}$ (mm)
EXP	140	470	0.30	1.34	8.16
MEF	46	464	0.10	1.33	33.30
MEF/EXP	0.32	0.99	-	-	4.08

No gráfico da figura 3.21 é possível observar que o deslocamento é muito superior que o modelo EXP. Com o aumento da carga, atinge a primeira fendilhação para um valor de 46 kN, quando o modelo EXP apenas com 140 kN surge a primeira fenda. Nesta modelação foi possível observar que no último passo de carga, existe um tirante que atinge a extensão última dando por terminado a análise não linear. De qualquer forma este modelo consegue resistir para a carga no qual foi dimensionada ($P_{ed}=350$ kN). O tirante 3 entra em cedência quando são atingidos os 446 kN da carga aplicada. Com o aumento da carga, outros tirantes atingem o patamar de cedência e, posteriormente, surge a rotura nos tirantes 3 e 18.

A tabela 3.10, apresenta os resultados da comparação entre os modelos MEF e EXP. No que toca à carga de fendilhação, existe uma discrepância elevada, sendo que no modelo EXP a primeira fenda surge para 140 kN, enquanto que no modelo MEF surge para os 46 kN. Para a carga última os valores são muito semelhantes. No entanto, observa-se que esta treliça possui uma elevada flexibilidade, uma vez que obteve aproximadamente 4 vezes o deslocamento sofrido que o modelo experimental. Isto deve-se ao facto, de o modelo MB3ee possuir um maior número de tirantes, sendo que este, necessita de maiores quantidades de armadura. Como foi considerado o modelo bilinear do aço, os tirantes tornam-se muito dúcteis. Porém, observa-se que entre os modelos de escoras e tirantes adoptados desde do MB1ee até ao MB3ee, começa a haver um aumento do número dos tirantes, onde, indirectamente, os modelos numéricos tornam-se mais dúcteis e susceptíveis a maiores deslocamentos.

A evolução de fendilhação do modelo MEF apresenta-se na figura 3.22. Como mencionado anteriormente, a primeira fenda surge muito cedo, e com o aumento da carga, vários elementos começam a exceder a extensão de fendilhação. O padrão, mais uma vez, é semelhante para o modelo EXP mas sempre para uma carga inferior. Para este modelo a rotura foi igual ao do modelo MB1ee-EXP, rotura da escora transversal no pilarete direito, conforme é possível observar na figura 3.23.

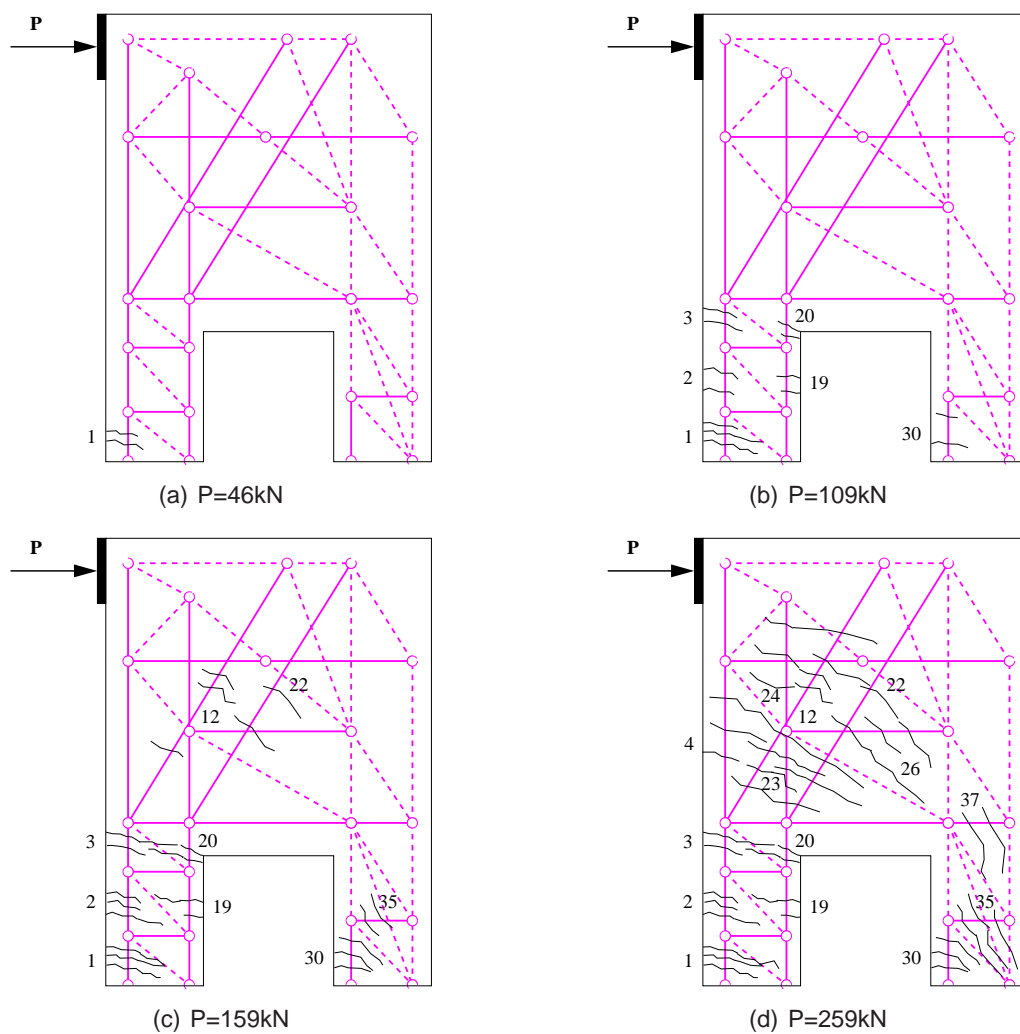


Figura 3.22: Evolução da fendilhação do modelo MB3ee-MEF.

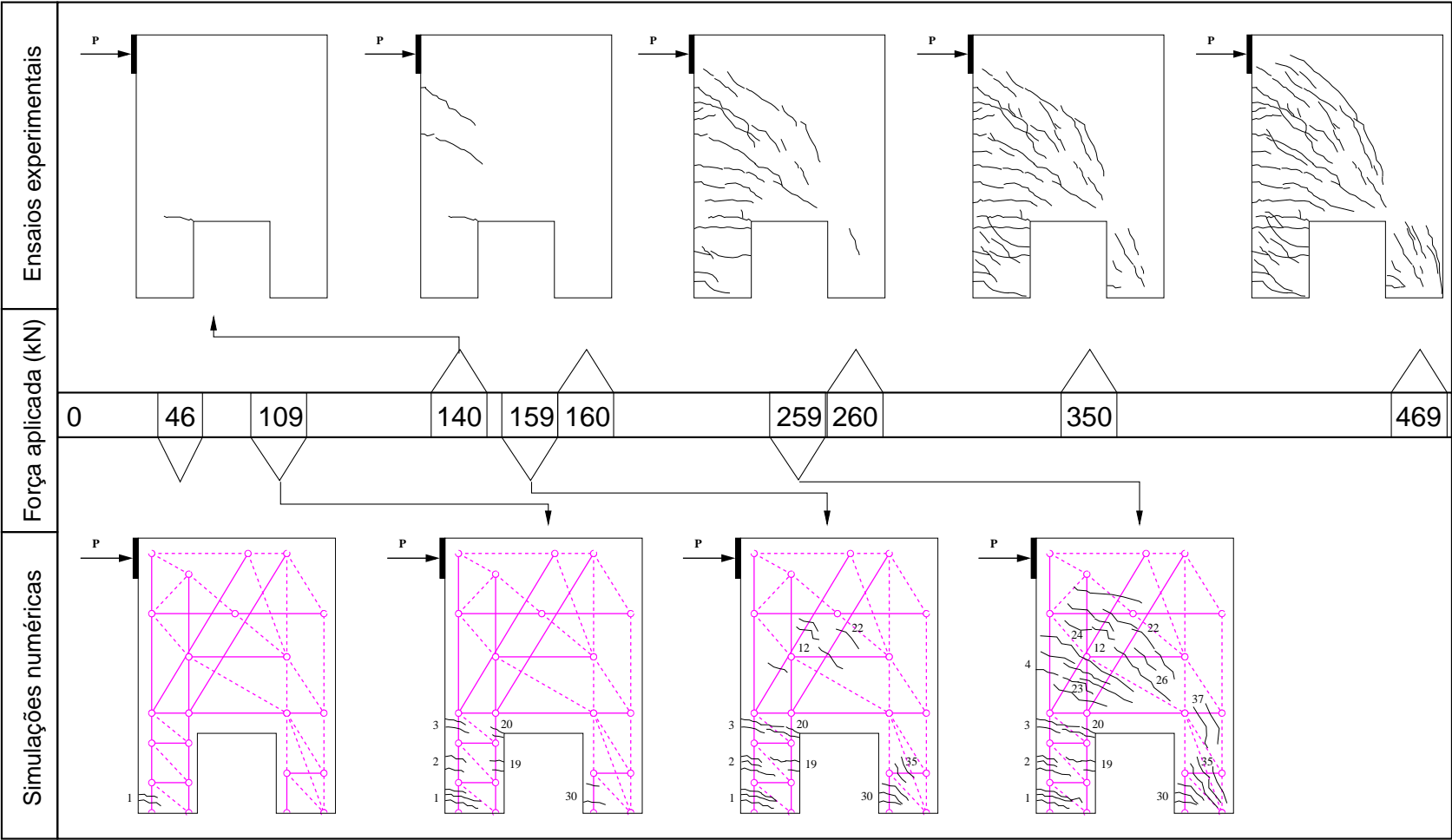


Figura 3.23: Cronograma da fendilhação nos modelos MB3ee-EXP e MB3ee-MEF.

A análise geral realizada para estes modelos numéricos, permitiram descrever o comportamento estrutural em função da carga aplicada. Permitiram também comparar os modelos MEF com os modelos experimentais de Filho. Todos os modelos cumpriram sempre a carga para a qual foram dimensionadas, assim como o padrão de fendilhação foi semelhante aos dos modelos EXP. Dos três modelos analisados, os resultados obtidos são aceitáveis para dar credibilidade ao capítulo que se segue.

Os resultados analisados serão comparados com o modelo otimizado que se segue no próximo capítulo. No entanto, refere-se que para, obter os dados da solução, revela ainda alguma complexidade, visto que é necessário retirar os dados para cada passo de carga manualmente, nomeadamente, as extensões da estrutura.

Capítulo 4

Caso de Estudo de Optimização

4.1 Introdução

Após terem sido validados os exemplos referidos na secção 3.2 (página 28), será ilustrado o processo que permite obter um modelo de escoras e tirantes optimizado. Inicialmente, será feita uma optimização topológica (OT), para que seja possível, obter uma compreensão das regiões da estrutura que resistem eficazmente ao carregamento solicitado. Após a OT, pretende-se definir uma treliça, que seguidamente, é modelada no *Ansys*, com o objectivo de realizar uma análise não linear adoptando os mesmos parâmetros, para os modelos numéricos estudados anteriormente. Concluída esta análise, os resultados obtidos serão comparados com os valores experimentais obtidos por Filho.

4.2 Optimização Topológica

Para formular o problema de optimização topológica no *Ansys*, inicialmente, é necessário modelar a geometria da estrutura. Assim, define-se a fronteira da estrutura, inserindo nós nos vértices da mesma e, de seguida, ligam-se os nós com as linhas. O tipo de elemento escolhido para a optimização foi *PLANE82*. Este caracteriza-se por ser utilizado para modelar problemas planos, ou axi-simétricos; é um elemento quadrangular constituído por oito nós no contorno e possui dois graus de liberdade por nó, os quais são as componentes do deslocamento nodal nas direcções *x* e *y*. O elemento, também modela bem geometrias curvas, no que pode ser adaptado em um elemento triangular quadrático [27]. A sua geometria é traduzida pela figura 4.1.

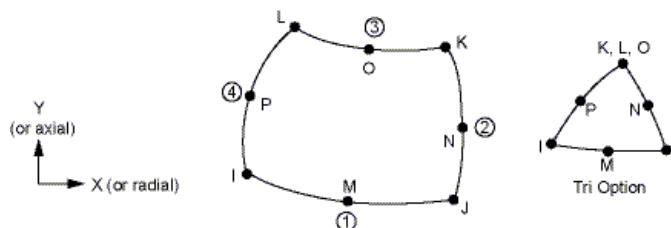


Figura 4.1: Elemento *PLANE82* [27].

Considera-se uma espessura de 12 cm para o elemento, onde este valor corresponde às espessuras dos modelos de Filho. No que toca à propriedade do elemento, foi atribuído o valor do módulo de elasticidade do betão ($E=30$ GPa) e o coeficiente de Poisson ($\nu=0.2$), definindo uma malha com elementos de dimensões de 2.5 cm, faltando apenas definir as condições de fronteira.

Neste sentido, aplica-se a força concentrada ($F=100$ kN), ao nó que corresponde ao ponto de aplicação do carregamento e restringem-se os graus de liberdade segundo as direcções x e y nos contornos que definem os apoios da estrutura.

Note-se que a função de OT do *Ansys* permite adoptar dois tipos de elementos, sendo que o primeiro permite definir o elemento que pode ser sujeito a remoção e o segundo fica restringindo, isto é, no processo de OT, o programa reconhece que este segundo elemento não pode sofrer alterações, enquanto no primeiro se observa o contrário (figura 4.2). Isto deve-se ao facto na zona superior da abertura e nas zonas dos apoios se tem restringido uma determinada área para ter em conta essas regiões, pois, caso contrário, após o processo de OT é possível observar que parte destas regiões poderiam não ser consideradas.

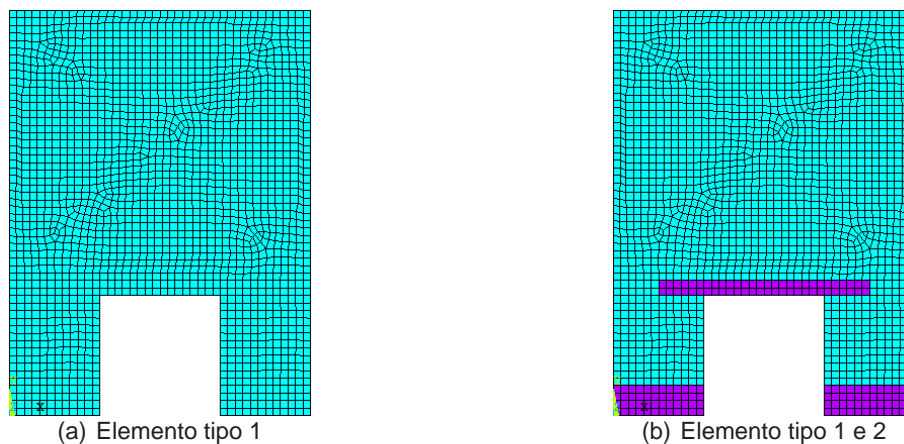


Figura 4.2: Definição da malha com dimensão do elemento de 2.5 cm.

Assim, executa-se a função de optimização topológica que o *Ansys* inclui no seu pacote comercial. Note-se, que é necessário inicialmente introduzir alguns parâmetros antes de ser executado, no entanto, neste estudo não foram exploradas as várias funcionalidades da OT, devido à elevada exigência de recursos computacionais. Na tabela 4.1, observam-se os parâmetros necessários para proceder à OT.

Deste modo, desenvolvem-se duas fases para definir a OT. Primeiro, definem-se as opções básicas, depois inserem-se os parâmetros para a execução da OT. Na função de OT do *Ansys*, na janela de Opções básicas (*Basic Opt*), insere-se qual o tipo de carga (*Load Case*) a utilizar; nesta situação, era apenas um caso a analisar, no entanto, se forem definidos vários tipos de carga, basta apenas indicar o número associado. Também na mesma janela, atribui-se a percentagem de redução de volume; este valor é adoptado pelo *Ansys*, pois o valor pré-definido é 50%. De seguida, na função executar (*Run*),

Tabela 4.1: Parâmetros adoptados para executar OT.

	Tipo de parâmetro	Código	Parâmetros adoptados
Opções básicas	Tipo de carga	[TOCOMP]	1
	Redução de volume (%)	[TOVAR]	50
Executar	Abordagem de cálculo	[TOTYPE]	Optimality
	Tolerância	[TODEF]	0.0001
	N.º de iterações	[TOLOOP]	20

assumem-se os valores adoptados por padrão, acrescentando apenas o número de iterações, e activa-se a função que permite ao programa ilustrar uma plotagem no fim de cada iteração, observando a evolução da optimização. Ainda na mesma tabela, observa-se uma coluna (Código) associada aos comandos necessários para programar em APDL.

O resultado final do processo de OT pode ser visualizado na figura 4.3. Note-se que o programa apresenta uma plotagem de densidades com a gama de valores compreendidos entre 0 e 1. Os elementos que estão associados à cor vermelha são aqueles que são essenciais, isto é, resistem de forma eficaz. Por sua vez, os elementos que não contribuem eficazmente para a resistência estão associados à cor azul. Indirectamente, o resultado final da OT permite observar o comportamento da carga no interior da estrutura, assim como perceber a localização dos tirantes e das escoras.

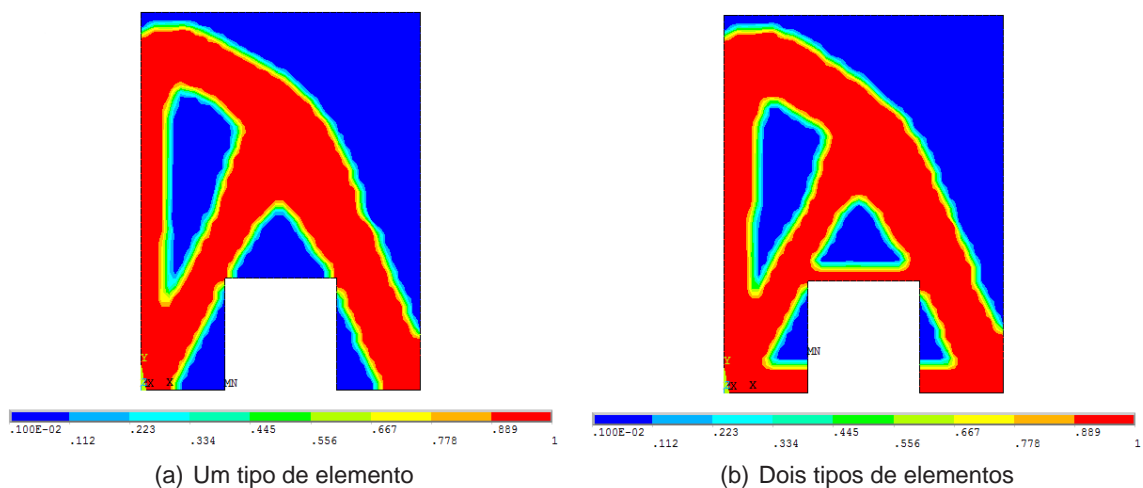


Figura 4.3: Modelos optimizados.

Na figura 4.3, apresentam-se os dois casos optimizados, contabilizando apenas um tipo de elemento em (4.3 (a)) e o segundo com as restrições associadas no topo da abertura e nos apoios em (4.3 (b)). É evidente que em (a) os apoios poderiam ser de dimensões mais reduzidas assim, como a abertura poderia ser de maior dimensão, tendo a geometria de um triângulo. Em (b), considerou-se dois tipos de elementos, onde um deles serviu para que os apoios da estrutura e a zona no topo da abertura fossem restringidos. Após a OT, verifica-se que nestas regiões os elementos não são

“desprezados”. A próxima fase consiste modelar a treliça tendo em conta o resultado obtido através da OT.

4.3 Modelo Numérico da Treliza Optimizada

Visualizando o resultado final da OT, o utilizador pode modelar a estrutura de acordo com os seus critérios. O resultado da OT apenas serve como ferramenta para auxiliar o utilizador a tomar uma decisão na elaboração da treliça. No caso estudado, a geometria da estrutura é simples, mas, para casos mais complexos esta ferramenta poderá ser bastante útil.

Decidiu-se modelar aqui uma treliça com a configuração geométrica semelhante do processo de OT obtido. Nas zonas onde os elementos são mais eficazes, aplica-se elementos de treliça, como se pode observar na figura 4.4.

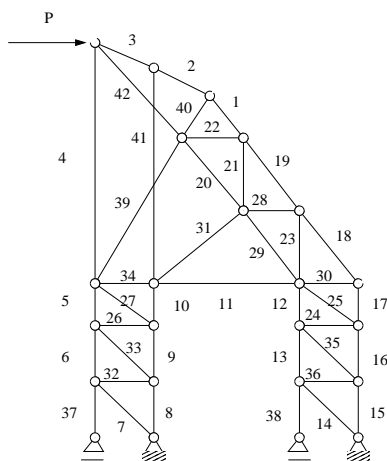


Figura 4.4: Treliza desenvolvida após processo de optimização topológica.

Falta agora determinar os esforços elásticos da estrutura e, através desta, ficam a conhecer-se quais os elementos da treliça que serão escoras e tirantes.

A treliça final possui uma estadia hiperestática, devido ao elevado número de malhas fechadas. Os modelos anteriores também tinham uma estadia hiperestática, e para os modelos se tornarem isostáticos, Filho liberta alguns elementos nos modelos de escoras e tirantes adoptados, a fim de obter os esforços elásticos. No caso da treliça optimizada, para se determinar os esforços dos elementos, recorre-se a uma optimização paramétrica (OP) onde se determinarão as secções adequadas para resistir à força aplicada.

Considera-se uma força de 100 kN no nó correspondente à carga aplicada nos modelos de Filho. Quanto às considerações dos materiais, adopta-se o mesmo comportamento do betão da OT, mas altera-se o tipo de elemento, uma vez que nesta fase, usa-se elementos *LINK180*. Para se proceder à OP, é necessário definir alguns parâmetros iniciais de optimização, sendo que estes são as variáveis de projecto e as variáveis

de estado, que foram referidas na secção 2.5 (página 18). Nas variáveis de projecto, definiu-se que a secção de cada elemento da estrutura tem que tomar valores no intervalo 0 a 0.018 m^2 . Por outras palavras, isto significa que, durante o processo de OP, a secção de cada elemento pode adoptar valores de 0 até uma área de $0.12 \times 0.15 \text{ m}^2$. Para as variáveis de estado, que permitem definir os limites da solução, definiram-se, neste caso, os valores máximos e mínimos de tensões admissíveis $[f_{cm}; f_{ctm}]$.

Tabela 4.2: Parâmetros adoptados para executar optimização paramétrica.

	Tipo de parâmetro	Código	Parâmetros adoptados
Definição da optimização	Variáveis de estado	[OPVAR]	[-42;3]
	Ordem da optimização	[OPTYPE]	1. ^a ordem
	Função objectivo	[OPVAR,OBJ]	Peso da estrutura
	Tolerância	[TODEF]	0.1
	N.º de iterações	[OPFRST]	16

Devido à quantidade de secções a optimizar, o processo iterativo de OP é bastante exaustivo e consome muitos recursos computacionais. Para melhorar o processamento nesta fase, foi necessário activar certas funções do *Ansys* para dedicar mais recursos ao programa de cálculo. Assim, adoptaram-se dezasseis iterações de optimização, visto serem suficientes para chegar a uma solução convergente, uma vez que mais iterações, resultavam em mais tempo de processamento.

Na figura 4.5, é possível observar o modelo MB-OPT antes e depois de ser optimizado. Note-se que todas as secções apresentam com uma escala de redução de 50%. No geral, os elementos sofreram uma redução da sua secção, pois, considerando inicialmente um volume de 100% após a optimização registava-se um volume da estrutura de aproximadamente 64%. desta forma, optimizaram-se 36% do volume estrutural, tornando certos elementos mais resistentes, e vice-versa.

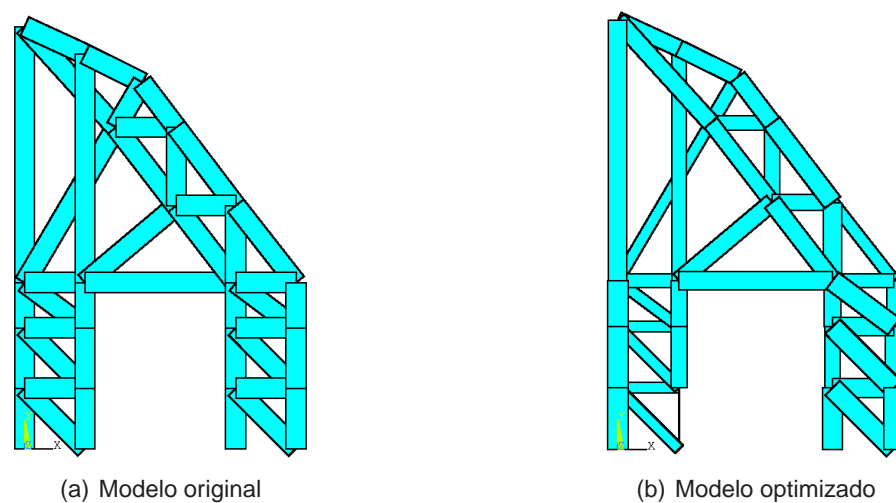


Figura 4.5: Evolução da optimização paramétrica.

Finalizado o processo de OP, faz-se novamente uma análise elástica com as novas

secções obtidas da OP, de modo a obter a nova distribuição de esforços. A força aplicada agora, corresponde à força dimensionamento ($P_{ed}=350$ kN) e é levada a cabo uma análise elástica, sendo que depois desta análise é possível visualizar quais os elementos que são tirantes e escoras. Através, da nova distribuição dos esforços elásticos, o procedimento é, de igual modo, às modelações dos modelos numéricos feitos anteriormente. Faltando apenas, realizar uma análise considerando a não linearidade dos materiais.

4.3.1 Análise Não Linear do Modelo Optimizado

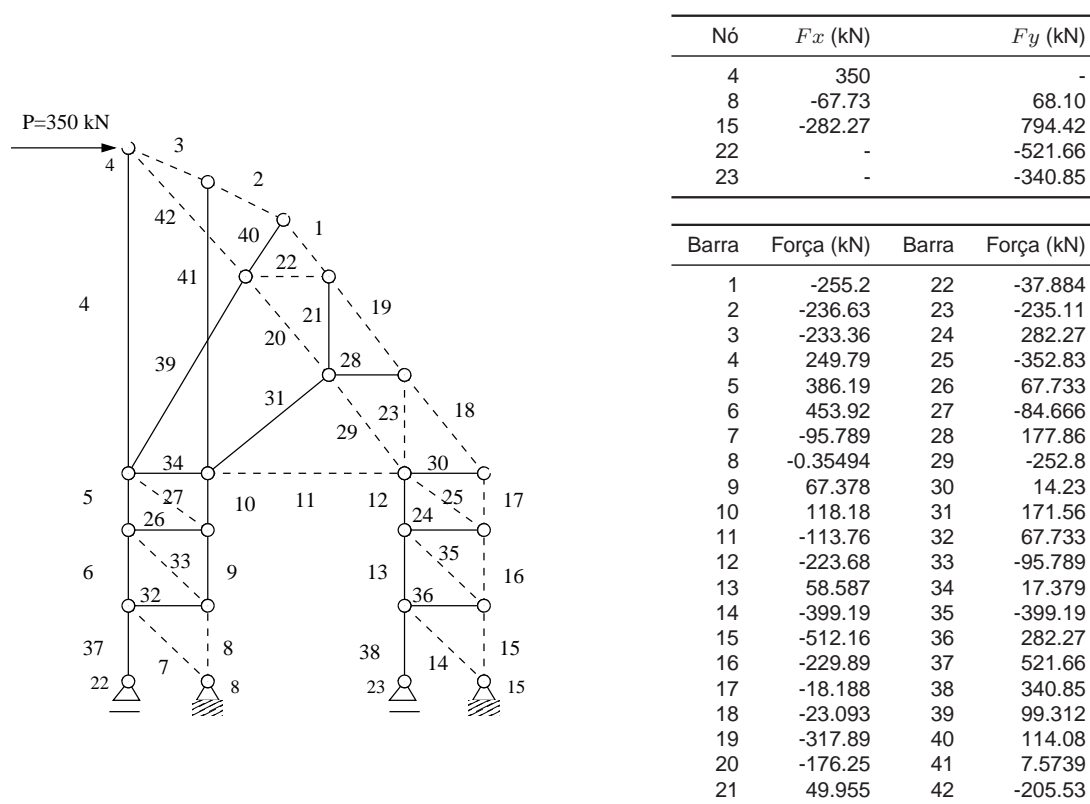


Figura 4.6: Modelo de treliça otimizado (MB-OPT) e esforços axiais do cálculo estático.

Na tabela da figura 4.6, apresentam-se os esforços estáticos da estrutura e determina-se a quantidade de armadura a adoptar para ser possível modelar as leis constitutivas para cada elemento.

Neste sentido, tem de ficar claro que, apesar de o dimensionamento ter sido feito para 350 kN, a estrutura é solicitada agora para uma força de 500 kN. Esta força, toma um valor excessivo para determinar para qual força se dá o colapso da estrutura.

O gráfico da figura 4.7, apresenta a relação força-deslocamento do modelo MB-OPT comparado com os resultados obtidos dos três modelos experimentais de Filho (MB1ee-EXP, MB2ee-EXP e MB3ee-EXP). Os resultados obtidos da estrutura otimizada são muito satisfatórios, destacam-se, claramente, que quando é excedido a carga para

o qual a estrutura foi dimensionada, começa a ceder, havendo um aumento significativo do deslocamento segundo a direcção x. Através, da análise não linear, observa-se que a estrutura conseguiu resistir a 79% dos 500 kN aplicados. Deste modo, tem de se avaliar, agora, em que passos de carga surgiu a fendilhação, a cedência e a rotura nos elementos.

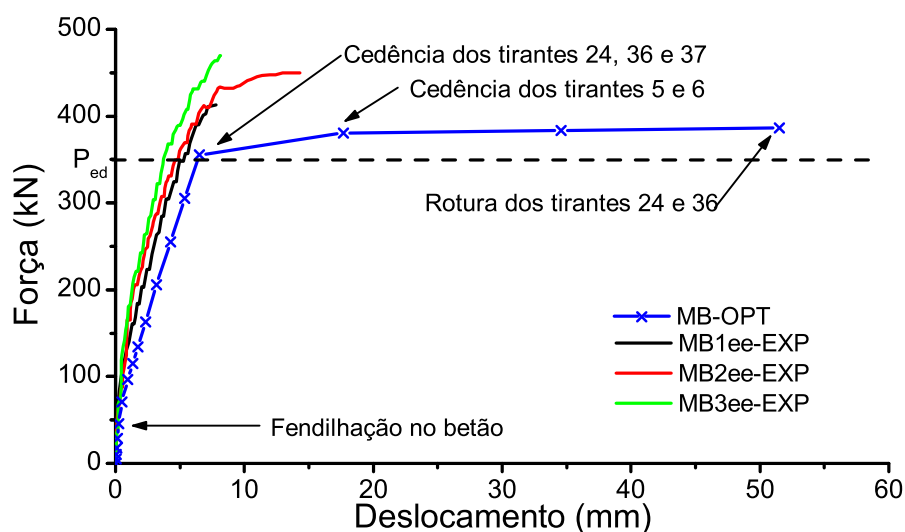


Figura 4.7: Diagrama força-deslocamento do modelo MB-OPT.

Observa-se que a estrutura, até atingir a carga de dimensionamento, tem um comportamento muito semelhante aos outros modelos experimentais. A partir da carga de dimensionamento, a estrutura entra em cedência devido aos tirantes 24, 36 e 37. Na tabela 4.3, apresenta-se uma os valores dos ensaios experimentais de Filho com os valores do modelo otimizado. Quanto à fendilhação, no modelo otimizado, esta ocorre para os 46 kN, enquanto os modelos EXP fendilham aproximadamente para valores acima de 100 kN. O modelo otimizado cumpriu, de certo modo, o seu objectivo, uma vez que tinha sido dimensionado e otimizado para uma carga de 350 kN, este acabou por resistir até aos 386 kN. Com os resultados obtidos da combinação das optimizações e da análise não linear, foi possível observar que, após, exceder a carga de dimensionamento, a estrutura começa a ceder e, por fim, atinge o colapso devido aos tirantes localizados no pilarete direito.

Apresenta-se de seguida uma evolução da fendilhação para o modelo MB-OPT. A evolução da fendilhação é semelhante para todos os outros modelos estudados. A primeira fenda surge no pilarete esquerdo para uma força relativamente baixa, no entanto, é de notar que a maioria dos tirantes do modelo MB-OPT fendilha para uma carga próxima dos 100 kN, valor para o qual a estrutura foi optimizada no processo de OT, como referido na secção 4.3.

Tabela 4.3: Valores experimentais e numéricos do modelo MB-OPT correspondentes às cargas e deslocamentos máximos.

Modelo	P_{cr} (kN)	P_u (kN)	P_{cr}/P_u	P_u/P_{ed}	$\delta_{máx}$ (mm)
MB1ee-EXP	100	413	0.24	1.18	7.57
MB2ee-EXP	120	450	0.27	1.29	14.28
MB3ee-EXP	140	470	0.29	1.34	8.16
MB-OPT	46	386	0.12	1.10	55.4

De um modo geral, os resultados obtidos com o MET otimizado foram bastante positivos no que toca à comparação dos resultados experimentais. Foi visto que, uma estrutura que seja otimizada para uma determinada carga apenas resistirá para a carga que foi otimizada; após superar esse valor, a estrutura começa a ceder. A combinação de alguns factores, como as modelações do comportamento não linear dos materiais, a realização da OT e OP contribuíram para a obtenção de um modelo de escoras e tirantes otimizado, que no caso de estudo demonstrou resultados eficientes no que diz respeito à capacidade resistente da estrutura. Certos fenómenos relacionados com a interacção do betão e aço não foram tomados em conta, nomeadamente o *bond slip*, o amolecimento do betão e a adopção de um modelo trilinear do aço. Como foi considerada uma secção geométrica igual para as escoras e para os tirantes, não foram analisados os estados das tensões internas quando se verificaram várias compressões a convergir num nó. Como foram desenvolvidos vários modelos numéricos em treliça, o tipo de elemento considerado, neste estudo, não permite obter esforços, nomeadamente, momentos flectores e esforço transversal.

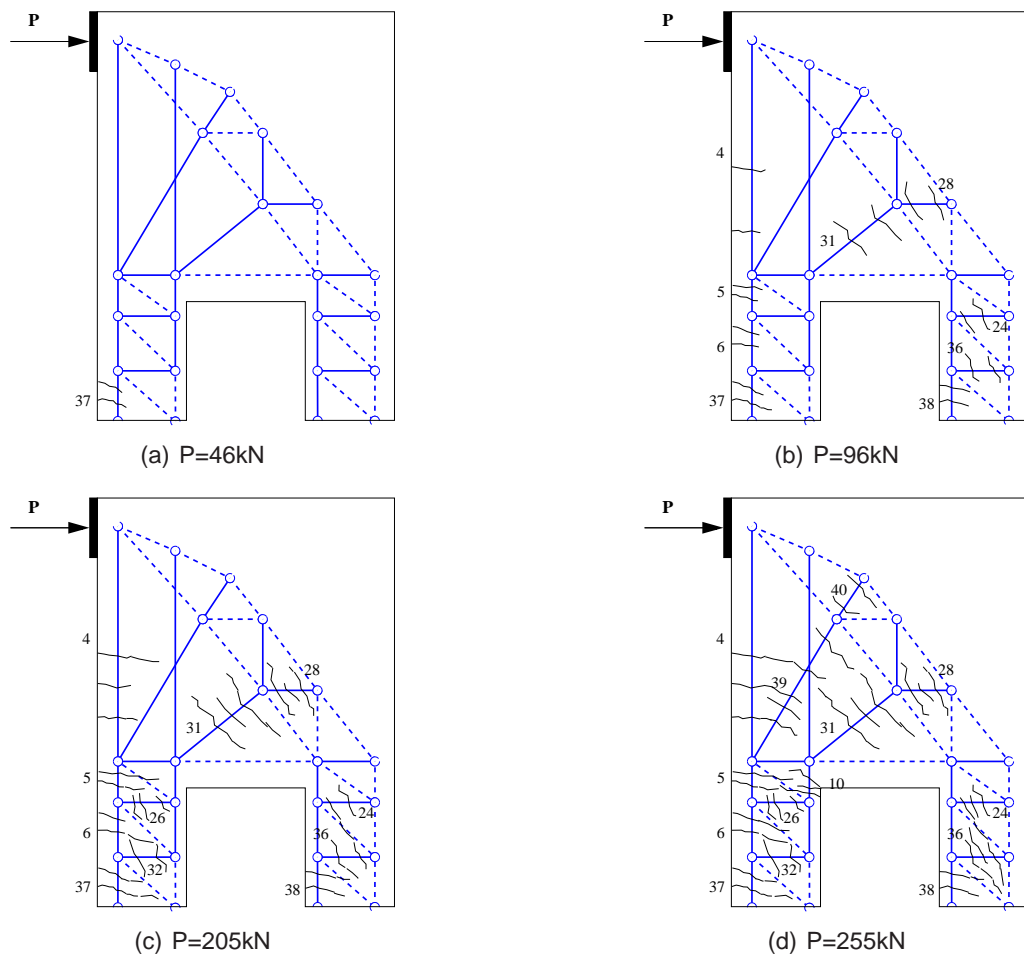


Figura 4.8: Evolução da fendilhação do modelo MB-OPT.

Capítulo 5

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

5.1 Conclusões

Uma vez que o modelo de escoras e tirantes tem um elevado potencial no dimensionamento de zonas D, verificou-se que este tem um valor pedagógico, sendo possível observar uma estrutura de forma treliça, sabendo como é feita a transmissão das forças internas. Este método foi aplicado a resultados obtidos em vários testes realizados de forma experimental. No entanto, para se proceder ao estudo realizado, é necessário conhecer os fundamentos do modelo de escoras e tirantes para perceber o comportamento da estrutura, de modo a ter um pensamento crítico relativamente aos resultados obtidos em regime não linear.

Nesta dissertação, foi adoptado um método simples, rápido e eficiente para proceder à modelação de modelos de escoras e tirantes tendo em conta a não linearidade dos materiais. Pretendeu-se incidir sobre dois pontos principais. Primeiro, validar modelações numéricas de estruturas de treliça no programa *Ansys*, onde estas foram comparadas com ensaios experimentais realizados por Filho. Adoptando uma análise não linear do material, foi demonstrado ser possível obter resultados satisfatórios a nível da fendilhação, cargas últimas, extensões e deslocamentos da estrutura. A adopção de elementos tipo barra torna a estrutura muito flexível, no entanto, devido à modelação do material em regime não linear, os resultados demonstrados foram próximos dos modelos experimentais de Filho.

O segundo ponto está relacionado com o estudo que foi desenvolvido para determinar modelos de escoras e tirantes recorrendo a ferramentas de optimização estrutural. Sabendo o domínio de uma estrutura de betão armado, é possível através da combinação da optimização topológica e paramétrica, obter um modelo de escoras e tirantes optimizado. Foi visto que na elaboração dos modelos de treliça, com o aumento da complexidade da treliça, o processo de optimização paramétrica exige elevados recursos computacionais. No entanto, verificaram-se resultados satisfatórios, através do modelo de escoras e tirantes optimizado (MB-OPT), pois este resistiu no limite para a carga na qual tinha sido dimensionado. Da comparação dos modelos experimentais de

Filho, a capacidade resistente do modelo MB-OPT encontra-se mais próximo da carga de dimensionamento. Verificou-se também, que um dado modelo de escoras e tirantes quando otimizado, fica simplesmente apto para resistir apenas para a carga o qual foi otimizado.

Demonstrou-se que a adopção de análises não lineares permite obter valores próximos de modelos experimentais ensaiados em laboratório. Através da análise não linear é possível observar a partir dos modelos numéricos um historial do comportamento estrutural desde do início da aplicação da carga até ao colapso da estrutura. Neste estudo, comparou-se um conjunto de resultados obtidos nos modelos numéricos com os resultados experimentais realizados por Filho, nomeadamente, os deslocamentos em locais comuns e a evolução da fendilhação. Foi, ainda possível identificar quais os elementos que atingiram os patamares de fendilhação, cedência e rotura.

Deste modo, o uso deste tipo de análises, não linear, permite reforçar a credibilidade na adopção destas análises, uma vez que, não requer a realização de ensaios experimentais em laboratório. Portanto, sai vantajoso no que toca a redução de custos e do tempo necessário para investigações deste género. Para estruturas onde se torna complexo desenvolver o modelo de escoras e tirantes, o uso do conjunto das ferramentas de optimização incluídas no *Ansys* permite ao utilizador entender o comportamento interno da estrutura e economizar tempo na elaboração de um modelo deste tipo.

A combinação da optimização estrutural com análises do tipo não linear permite obter valores aceitáveis, no entanto, dever-se-á, quando possível, elaborar modelos numéricos de forma a serem comparados com ensaios experimentais com o objectivo de reforçar a metodologia desenvolvida.

5.2 Desenvolvimentos Futuros

Para desenvolvimentos futuros ficam várias sugestões que deverão ser avaliadas:

- Analisar outros modelos numéricos baseados em modelos experimentais previamente estudados, nomeadamente, dar continuidade aos restantes modelos experimentais propostos por Filho, pois apenas se estudou três dos doze modelos experimentais;
- Considera-se que seria importante desenvolver algoritmos, de modo a introduzir as leis dos materiais automaticamente e incluir outros fenómenos relacionados com o betão e aço, assim, como a sua interacção. Implementar um algoritmo de forma a possibilitar a verificação dos estados das tensões internas nos nós;
- Analisar as diferenças das leis constitutivas existentes para o aço, nomeadamente, o modelo trilinear do aço, uma vez que este torna mais realista o comportamento do mesmo;
- Seria uma mais-valia explorar também as áreas de optimização estrutural adaptando-as no ramo da engenharia civil. Executar modelos de optimização através de diferentes métodos de resolução incluídos no programa *Ansys*;

- Ensaiar em laboratório um modelo de uma parede resistente, adoptando o modelo de escoras e tirantes optimizado (MB-OPT).

Bibliografia

- [1] NP EN 1992-1-1 Eurocódigo 2: *Projecto de Estruturas de Betão Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios*. Comité Europeu de Normalização, Bélgica, Abril, 2004.
- [2] Ali, M. A. e R. N. White: *Automatic Generation of Truss Model for Optimal Design of Reinforced Concrete Structures*. Structural Journal, 98(4):431–442, 2001.
- [3] Almeida, J. F. e M. S. Lourenço: *Acetatos Betão Estrutural Zonas de Descontinuidade - Modelação e Verificação da Segurança, consultado em 25 de Agosto de 2011*. Instituto Superior Técnico. <http://www.civil.ist.utl.pt/cristina/EBAP/2006/03-STM1%20Cores.pdf>.
- [4] Bendsøe, M. P. e O. Sigmund: *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer, 2003, ISBN 9783540429920.
- [5] Christensen, P. W. e A. Klarbring: *An Introduction to Structural Optimization*. Springer, 2009.
- [6] Comité euro-international du béton: *CEB-FIP model code 1990: final draft*, volume 3 de *Bulletin d'information*. CEB, Lausanne, 1991, ISBN 9782883940109.
- [7] Fédération internationale du béton: *Structural concrete: textbook on behaviour, design and performance : updated knowledge of the CEB/FIP Model code 1990*, volume 3 de *Bulletin (Fédération internationale du béton)*. International Federation for Structural Concrete, 1999, ISBN 9782883940420.
- [8] Fédération internationale du béton: *Structural concrete: textbook on behaviour, design and performance : updated knowledge of the CEB/FIP Model code 1990*, volume 2 de *Bulletin (Fédération internationale du béton)*. International Federation for Structural Concrete, 1999, ISBN 9782883940420.
- [9] Fédération internationale du béton (editor): *Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures: State-of-art report*, volume 45 de *Bulletin (Fédération internationale du béton)*. International Federation for Structural Concrete, 2008, ISBN 9782883940857.
- [10] Filho, J. B.: *Dimensionamento e Comportamento do Betão Estrutural em Zonas com Descontinuidades*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa, 1995.

- [11] Freitas, J. C. G.: *Estudos de Problemas de Mecânica dos Solos Pelo Teorema da Região Inferior com Recurso à Programação Linear*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1994.
- [12] Germano, C. S. F.: *Zonas de Descontinuidade de Betão Estrutural Submetidas a Acções Cíclicas*. Tese de Mestrado, Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa, 2008.
- [13] Huang, X. e M. Xie: *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. John Wiley & Sons, 2010, ISBN 9780470746530.
- [14] J. Schlaich, K. Schäfer e M. Jennewein: *Toward a Consistent Design of Structural Concrete*. PCI Journal, 32(3):74–150, 1987.
- [15] Liang Q. Q., G. P. Steven e B. Uy: *Performance-Based Optimization for Strut-Tie Modeling of Structural Concrete*. Journal of Structural Engineering, 128(6):815–823, 2002.
- [16] Lourenço, P.: *Novas Metodologias Para o Dimensionamento De Estruturas de Betão Armado*. Relatório das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Universidade do Minho, Guimarães, 1992.
- [17] Martins, J. J. G.: *Análise Não Linear Geométrica de Estruturas Reticuladas Espaciais*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Setembro 1997.
- [18] Meirinhos, G. F.: *Projecto de Betão Armado com Modelos de Escoras e Tirantes Assistido por Computador*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2008. <http://hdl.handle.net/10216/12162>.
- [19] Muttoni, A., J. Schwartz e B. Thürlimann: *Design of Concrete Structures with Stress Fields*. Birkhäuser, 1997, ISBN 9783764354916.
- [20] Pinho, M. J. M.: *Análise e Síntese de Meios de Betão Armado pelo Modelo Escora-Tirante*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia do Porto, Departamento de Engenharia Civil, Fevereiro 1995.
- [21] Reineck, K. H., American Concrete Institute. Convention, Strut American Concrete Institute. Subcommittee 445-1 e Tie Models: *Examples for the Design of Structural Concrete with Strut-and-tie Models*. SPECIAL PUBLICATION. American Concrete Institute, 2002, ISBN 9780870310867.
- [22] Rodrigues, C. C.: *Modelação Numérica de Pilares. Modelos dos Materiais e Modelação de Pilares Reforçados com FRP*. Publicação UNIC DTC5, 2005.
- [23] Schlaich, J. e K. Schäfer: *Design and Detailing of Structural Concrete using Strut-and-tie Models*. Structural Engineer, 69(6):113–125, 1991.
- [24] Silva, E. C. N.: *Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas*. Relatório Técnico, Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002.

- [25] Stramandinoli, R. S. B. e H. L. La Rovere: *An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members*. Engineering Structures, 30(7):2069 – 2080, 2008, ISSN 0141-0296.
- [26] Vecchio, F. J. e M. Tala: *Approximate Analyses of Reinforced Concrete Slabs*. Structural Engineering and Mechanics, 8(1):1–18, 1999.
- [27] www: *Manual Software ANSYS versão 11.0*, consultado em 20 de Setembro de 2010. <http://www.kxcad.net/ansys/index.htm>.
- [28] Xie, Y. M. e G. P. Steven: *Evolutionary structural optimization*. Springer, 1997.
- [29] Yun, Y.: *Design of Structures Optimization with APDL*. Journal of East China Jiaotong University, 4:52–55, 2004.

Apêndice A

Pormenorização das Armaduras dos Modelos Experimentais

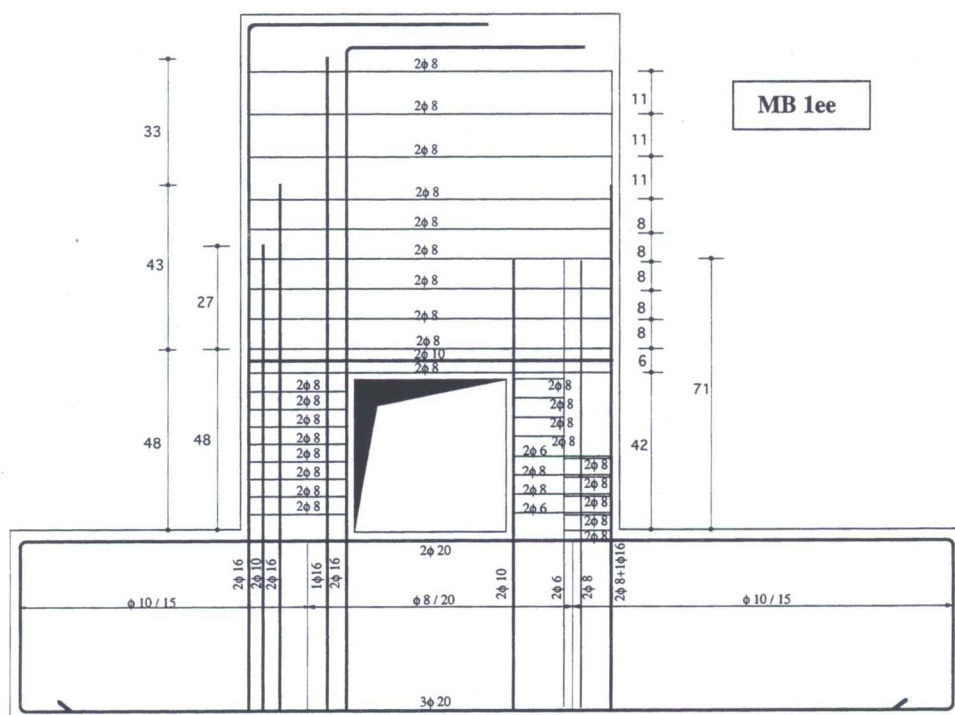


Figura A.1: Pormenorização das armaduras do modelo MB1ee-EXP, adaptado [10]

72 APÊNDICE A. PORMENORIZAÇÃO DAS ARMADURAS DOS MODELOS EXPERIMENTAIS

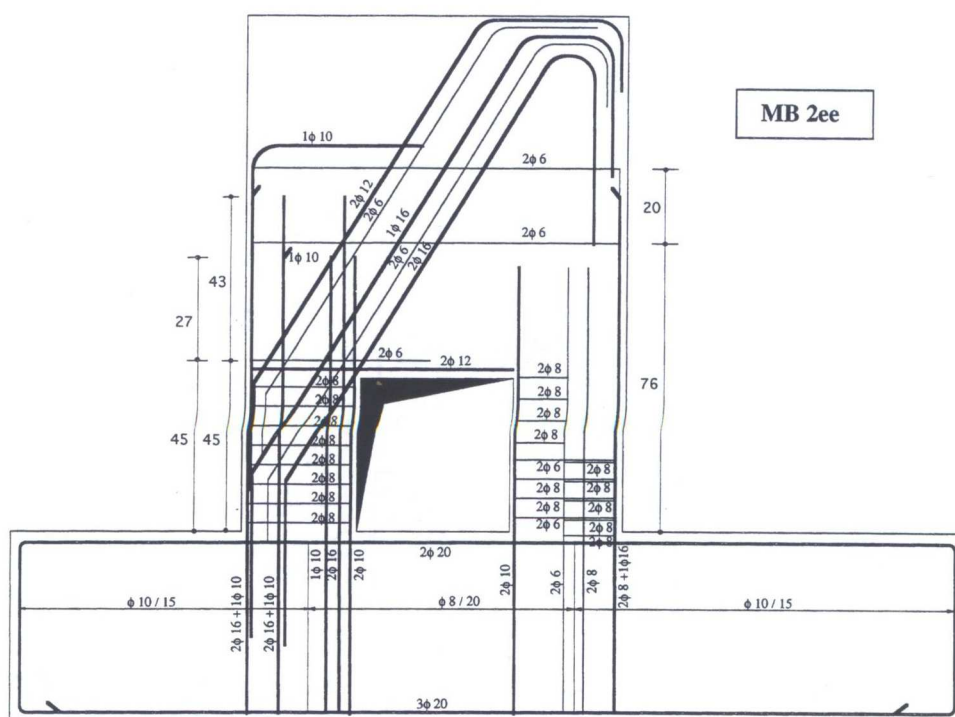


Figura A.2: Pormenorização das armaduras do modelo MB2ee-EXP, adaptado [10]

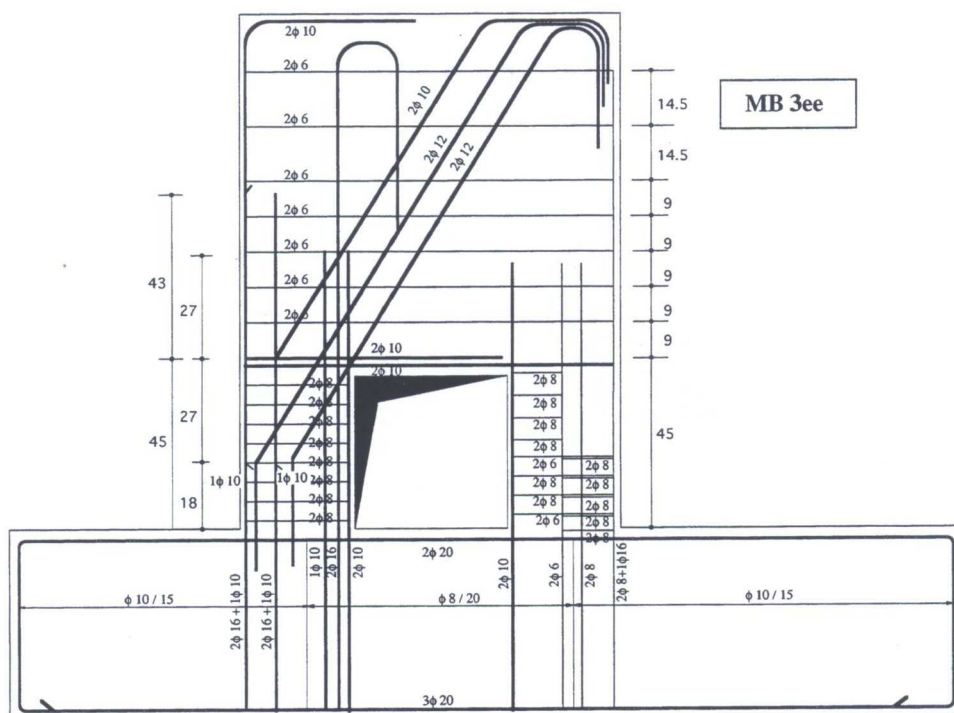


Figura A.3: Pormenorização das armaduras do modelo MB3ee-EXP, adaptado [10]

Apêndice B

Script de Optimização Paramétrica

Apresenta-se a seguir o *script* para proceder à optimização paramétrica. São definidos inicialmente a geometria da estrutura, o tipo de elemento, o material e as condições de fronteira. Executa-se uma análise elástica para avaliar os esforços obtidos. Prossegue-se a optimização paramétrica e observa-se depois ao fim de 16 iterações uma estrutura optimizada, onde neste caso houve diminuição o seu volume total.

```
/prep7 !PRÉ-PROCESSAMENTO
!
!-----DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA-----
k,1,0.5030947,1.065261
k,2,0.3904597 ,1.213781
k,3,0.2 ,1.3081
k,4,0 ,1.4
k,5,0 ,0.55
k,6,0 ,0.4
k,7,0 ,0.2
k,8,0.2 ,0
k,9,0.2 ,0.2
k,10,0.2 ,0.4
k,11,0.2 ,0.55
k,12,0.7 ,0.55
k,13,0.7 ,0.4
k,14,0.7 ,0.2
k,15,0.9 ,0
k,16,0.9 ,0.2
k,17,0.9 ,0.4
k,18,0.9 ,0.55
k,19,0.7 ,0.8056217
k,20,0.3030947 ,1.065261
k,21,0.5030947 ,0.8056217
k,22,0 ,0
k,23,0.7 ,0
```

1,2 ,1
1,3 ,2
1,4 ,3
1,4 ,5
1,6 ,5
1,7 ,6
1,8 ,7
1,9 ,8
1,10 ,9
1,11 ,10
1,11 ,12
1,13 ,12
1,14 ,13
1,15 ,14
1,16 ,15
1,17 ,16
1,18 ,17
1,18 ,19
1,19 ,1
1,21 ,20
1,21 ,1
1,1 ,20
1,12 ,19
1,17 ,13
1,12 ,17
1,10 ,6
1,5 ,10
1,19 ,21
1,12 ,21
1,18 ,12
1,11 ,21
1,9 ,7
1,9 ,6
1,11 ,5
1,16 ,13
1,16 ,14
1,22 ,7
1,23 ,14
1,5 ,20
1,20 ,2
1,11 ,3
1,4 ,20

!-----FIM DA DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA-----


```

!-----MATERIAL 1 -----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,30000!Módulo de elasticidade MPa
MPDATA,PRXY,1,,0.25 !Coeficiente de Poisson

!----- FIM DO MATERIAL 1 -----

/PREP7

n=42 !Número de elementos da treliça
h=0.15 !Altura das secções iniciais em m
e=0.12 !Espessura da parede resistente em m

*DO,i,1,n,1 !Ciclo DO ,criar várias secções para cada elemento
A_%i%=h*e
*ENDDO

ET,1,LINK180 ! Elemento link180

*DO,i,1,n,1 !Ciclo DO, definir as secções de cada elemento
R,i,A_%i%
*ENDDO

!*
LESIZE,ALL,1, , , ,1, , ,1, !Tamanho do elemento finito é igual ao
!comprimento de cada elemento barra

*DO,i,1,n,1 !Início definição da malha
TYPE, 1
MAT,1
REAL, i
ESYS, 0
SECNUM,
!*
LMESH, i
*ENDDO !Fim definição da malha

FINISH

/SOL !Aplicar forças e condições de fronteira
!*
ANTYPE,0 !Análise estática

FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,4 !Keypoint da força (k4)
!*

```

```

/GO
FK,P51X,FX,.1 !Valor da força 0.1 (mN)
FLST,2,2,3,ORDE,2 !Apoio em k22,k23 segundo direcção Y
FITEM,2,22
FITEM,2,23
!*
/GO
DK,P51X, , , ,0,UY, , , , , ,

FLST,2,2,3,ORDE,2 !Apoio em k8,k15 segundo direcção X e Y
FITEM,2,8
FITEM,2,15
!*
/GO
DK,P51X, , , ,0,ALL, , , , , ,

SOLVE !Execução da análise
FINISH
!
!----- Pós-processamento e avaliar valores variáveis de estado-----
/POST1
SET,LAST
ETABLE,EVOL,VOLU !Volume de cada elemento
SSUM !Somatório do volume de cada elemento
*GET,VTOT,SSUM, ,ITEM,EVOL !VTOT = volume total - Função objectivo
RHO=2500 !Peso específico do betão
WT=RHO*VTOT !Calcular peso total
ETABLE,SIG,LS,1 !Armazenar tensão axial em lista
!
*DO,i,1,n,1
*GET,SIG%i%,ELEM,i,ETAB,SIG

SIG%i%=ABS(SIG%i%) !Valor absoluto da tensão axial em cada elemento
*ENDDO

/ESHAPE,2
/VIEW,1,1,1,1 !Vista em perspectiva
EPLOT !Plotagem
LGWRITE,trelica,lgw,,COMMENT ! Escrever base de dados ficheiro trelica.lgw
FINISH
!
/OPT ! Modo de optimização paramétrica
OPANL,truss,lgw ! Abrir ficheiro truss.lgw

!----- Definir variáveis de projecto -----
*DO,i,1,n,1
OPVAR,A_%i%,DV,0,0.018

```

!-----Definir variáveis de estado-----

OPVAR,SIG%i%,SV,-42,3, ,

!*
*ENDDO

OPSAVE,trussvar,opt ! Gravar dados da otimização

OPVAR,WT,OBJ, , ,.1,! Definir função objectivo

OPTYPE,FIRST ! Otimização de primeira ordem

OPFRST,16 ! 16 iterações

OPEXE ! Início da otimização

OPLIST,16 ! Listar solução da iteração 16

OPLIST,ALL ! Listar todas as soluções

!

FINISH

Apêndice C

Script para Modelo Não Linear

O *script* que se segue, pertence ao modelo MB-OPT, onde modela-se a geometria e atribui-se as propriedades não lineares dos materiais para o caso de elementos escoras e tirantes. Para os outros modelos MB1ee-MEF, MB2ee-MEF e MB3ee-MEF o *script* usado é semelhante havendo apenas alteração nas propriedades dos materiais e da sua geometria.

```
/prep7 !Pré-processamento
!-----GEOMETRIA-----
!Definição dos pontos e linhas
k, 1 , 0.5030947 , 1.065261
k, 2 , 0.3904597 , 1.213781
k, 3 , 0.2 , 1.3081
k, 4 , 0 , 1.4
k, 5 , 0 , 0.55
k, 6 , 0 , 0.4
k, 7 , 0 , 0.2
k, 8 , 0.2 , 0
k, 9 , 0.2 , 0.2
k, 10 , 0.2 , 0.4
k, 11 , 0.2 , 0.55
k, 12 , 0.7 , 0.55
k, 13 , 0.7 , 0.4
k, 14 , 0.7 , 0.2
k, 15 , 0.9 , 0
k, 16 , 0.9 , 0.2
k, 17 , 0.9 , 0.4
k, 18 , 0.9 , 0.55
k, 19 , 0.7 , 0.8056217
k, 20 , 0.3030947 , 1.065261
k, 21 , 0.5030947 , 0.8056217
k, 22 , 0 , 0
k, 23 , 0.7 , 0
```

1,2 ,1
1,3 ,2
1,4 ,3
1,4 ,5
1,6 ,5
1,7 ,6
1,8 ,7
1, 9 , 8
1, 10 , 9
1, 11 , 10
1, 11 , 12
1, 13 , 12
1, 14 , 13
1, 15 , 14
1, 16 , 15
1, 17 , 16
1, 18 , 17
1, 18 , 19
1, 19 , 1
1, 21 , 20
1, 21 , 1
1, 1 , 20
1, 12 , 19
1, 17 , 13
1, 12 , 17
1, 10 , 6
1, 5 , 10
1, 19 , 21
1, 12 , 21
1, 18 , 12
1, 11 , 21
1, 9 , 7
1, 9 , 6
1, 11 , 5
1, 16 , 13
1, 16 , 14
1, 22 , 7
1, 23 , 14
1, 5 , 20
1, 20 , 2
1, 11 , 3
1, 4 , 20

!-----FIM da GEOMETRIA-----

```

/prep7
!-----MATERIAL 37 -B.A. L37-----
MPTEMP,,,,,,,, ! linha 37
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,37,,45192.4444!Módulo de elasticidade MPa....EXCEL
MPDATA,PRXY,37,,0.25 !Poisson
!*
TBDE,MISO,1,,,
TB,MISO,37,1,25,0
TBTEMP,0
TBPT,,0.00005 ,2.25962
TBPT,,8.92857E-05 ,4.03504
TBPT,,0.0001 ,4.03504
TBPT,,0.00015 ,4.03504
TBPT,,0.0002 ,4.59773
TBPT,,0.00025 ,5.11450
TBPT,,0.00045 ,7.25141
TBPT,,0.0006 ,8.89380
TBPT,,0.00065 ,9.44581
TBPT,,0.00075 ,10.55495
TBPT,,0.0008 ,11.11168
TBPT,,0.00095 ,12.78881
TBPT,,0.0011 ,14.47422
TBPT,,0.00125 ,16.16600
TBPT,,0.0013 ,16.73110
TBPT,,0.00145 ,18.42938
TBPT,,0.0016 ,20.13150
TBPT,,0.0018 ,22.40590
TBPT,,0.00185 ,22.97525
TBPT,,0.002 ,24.68489
TBPT,,0.0021 ,25.82584
TBPT,,0.00215 ,26.39664
TBPT,,0.0025 ,30.39752
TBPT,,0.0675 ,32.31978
!----- FIM DO MATERIAL 37 -B.A. L37-----

!-----MATERIAL 6 -B.A. L6-----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,6,,43687.1111 !Módulo de elasticidade MPa....EXCEL
MPDATA,PRXY,6,,0.25 !Poisson

TBDE,MISO,1,,,
TB,MISO,6,1,25,0
TBTEMP,0
TBPT,,0.00005 ,2.18436
TBPT,,8.92857E-05 ,3.90063

```

```

TBPT,,0.0001 ,3.90063
TBPT,,0.00015 ,3.90063
TBPT,,0.0002 ,4.29666
TBPT,,0.00025 ,4.73817
TBPT,,0.00045 ,6.57401
TBPT,,0.0006 ,7.99060
TBPT,,0.00065 ,8.46734
TBPT,,0.00075 ,9.42595
TBPT,,0.0008 ,9.90741
TBPT,,0.00095 ,11.35874
TBPT,,0.0011 ,12.81836
TBPT,,0.00125 ,14.28433
TBPT,,0.0013 ,14.77417
TBPT,,0.00145 ,16.24665
TBPT,,0.0016 ,17.72297
TBPT,,0.0018 ,19.69630
TBPT,,0.00185 ,20.19039
TBPT,,0.002 ,21.67422
TBPT,,0.0021 ,22.66464
TBPT,,0.00215 ,23.16017
TBPT,,0.0025 ,26.63419
TBPT,,0.0675 ,28.18012

```

```
!----- FIM DO MATERIAL 6 -B.A. L6-----
```

```
!-----MATERIAL 5 -B.A. L5-----
```

```
MPTEMP,,,,,,,,
```

```
MPTEMP,1,0
```

```
MPDATA,EX,5,,42182.0000 !Módulo de elasticidade MPa...EXCEL
```

```
MPDATA,PRXY,5,,0.25 !Poisson
```

```
TBDE,MISO,1,,
```

```
TB,MISO,5,1,25,0
```

```
TBTEMP,0
```

```
TBPT,,0.00005 ,2.10910
```

```
TBPT,,8.92857E-05 ,3.76625
```

```
TBPT,,0.0001 ,3.76625
```

```
TBPT,,0.00015 ,3.76625
```

```
TBPT,,0.0002 ,3.99564
```

```
TBPT,,0.00025 ,4.36189
```

```
TBPT,,0.00045 ,5.89671
```

```
TBPT,,0.0006 ,7.08753
```

```
TBPT,,0.00065 ,7.48902
```

```
TBPT,,0.00075 ,8.29711
```

```
TBPT,,0.0008 ,8.70332
```

```
TBPT,,0.00095 ,9.92889
```

```
TBPT,,0.0011 ,11.16273
```



```

TBPT,,0.00125 ,12.40294
TBPT,,0.0013 ,12.81752
TBPT,,0.00145 ,14.06423
TBPT,,0.0016 ,15.31479
TBPT,,0.0018 ,16.98710
TBPT,,0.00185 ,17.40593
TBPT,,0.002 ,18.66400
TBPT,,0.0021 ,19.50390
TBPT,,0.00215 ,19.92418
TBPT,,0.0025 ,22.87141
TBPT,,0.0675 ,24.04106
!----- MATERIAL 5 -B.A. L5-----

```

```

!-----MATERIAL 38 -B.A. L38-----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,38,,41174.4444 !Módulo de elasticidade MPa....EXCEL
MPDATA,PRXY,38,,0.25 !Poisson

```

```

TBDE,MISO,1,,,
TB,MISO,38,1,25,0
TBTEMP,0
TBPT,,0.00005 ,2.05872
TBPT,,8.92857E-05 ,3.67629
TBPT,,0.0001 ,3.67629
TBPT,,0.00015 ,3.67629
TBPT,,0.0002 ,3.79413
TBPT,,0.00025 ,4.11000
TBPT,,0.00045 ,5.44331
TBPT,,0.0006 ,6.48300
TBPT,,0.00065 ,6.83411
TBPT,,0.00075 ,7.54145
TBPT,,0.0008 ,7.89728
TBPT,,0.00095 ,8.97171
TBPT,,0.0011 ,10.05442
TBPT,,0.00125 ,11.14350
TBPT,,0.0013 ,11.50770
TBPT,,0.00145 ,12.60328
TBPT,,0.0016 ,13.70270
TBPT,,0.0018 ,15.17350
TBPT,,0.00185 ,15.54195
TBPT,,0.002 ,16.64889
TBPT,,0.0021 ,17.38804
TBPT,,0.00215 ,17.75794
TBPT,,0.0025 ,20.35252
TBPT,,0.0675 ,21.27028

```

!----- FIM DO MATERIAL 38 -B.A. L38-----

!-----MATERIAL 24 -B.A. L24&36-----

MPTEMP,,,,,,,, !L24 e 36

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,24,,39872.6667!Módulo de elasticidade MPa...EXCEL

MPDATA,PRXY,24,,0.25 !Poisson

TBDE,MISO,1,,

TB,MISO,24,1,25,0

TBTEMP,0

TBPT,,0.00005 ,1.99363

TBPT,,8.92857E-05 ,3.56006

TBPT,,0.0001 ,3.56006

TBPT,,0.0002 ,3.56006

TBPT,,0.00025 ,3.78456

TBPT,,0.00045 ,4.85751

TBPT,,0.0006 ,5.70193

TBPT,,0.00065 ,5.98795

TBPT,,0.00075 ,6.56511

TBPT,,0.0008 ,6.85586

TBPT,,0.00095 ,7.73502

TBPT,,0.0011 ,8.62247

TBPT,,0.00125 ,9.51628

TBPT,,0.0013 ,9.81539

TBPT,,0.00145 ,10.71570

TBPT,,0.0016 ,11.61986

TBPT,,0.0018 ,12.83030

TBPT,,0.00185 ,13.13367

TBPT,,0.002 ,14.04533

TBPT,,0.0021 ,14.65430

TBPT,,0.00215 ,14.95912

TBPT,,0.0025 ,17.09807

TBPT,,0.0675 ,17.69040

!----- FIM DO MATERIAL 24 -B.A. L24&36-----

!-----MATERIAL 28 -B.A. L28&31-----

MPTEMP,,,,,,,,

MPTEMP,1,0

MPDATA,EX,28,,37552.4444!Módulo de elasticidade MPa...EXCEL

MPDATA,PRXY,28,,0.25 !Poisson

TBDE,MISO,1,,

TB,MISO,28,1,25,0

TBTEMP,0

```

TBPT,,0.00005 ,1.87762
TBPT,,8.92857E-05 ,3.35290
TBPT,,0.0001 ,3.35290
TBPT,,0.00025 ,3.35290
TBPT,,0.00045 ,3.81341
TBPT,,0.0006 ,4.30980
TBPT,,0.00065 ,4.47981
TBPT,,0.00075 ,4.82495
TBPT,,0.0008 ,4.99968
TBPT,,0.00095 ,5.53081
TBPT,,0.0011 ,6.07022
TBPT,,0.00125 ,6.61600
TBPT,,0.0013 ,6.79910
TBPT,,0.00145 ,7.35138
TBPT,,0.0016 ,7.90750
TBPT,,0.0018 ,8.65390
TBPT,,0.00185 ,8.84125
TBPT,,0.002 ,9.40489
TBPT,,0.0021 ,9.78184
TBPT,,0.00215 ,9.97064
TBPT,,0.0025 ,11.29752
TBPT,,0.0675 ,11.29752
!-----FIM DO MATERIAL 28 -B.A. L28&31-----

!-----MATERIAL 4 -B.A. L4etc-----
MPTEMP,,,,,,,, ! L4;L10;L40;L41
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,4,,36459.5989 !Módulo de elasticidade MPa....EXCEL
MPDATA,PRXY,4,,0.25 !Poisson

TBDE,MISO,1,,
TB,MISO,4,1,24,0
TBTEMP,0
TBPT,,0.00005 ,1.82298
TBPT,,8.92857E-05 ,3.25532
TBPT,,0.00045 ,3.25532
TBPT,,0.0006 ,3.65409
TBPT,,0.00065 ,3.76946
TBPT,,0.00075 ,4.00531
TBPT,,0.0008 ,4.12540
TBPT,,0.00095 ,4.49261
TBPT,,0.0011 ,4.86809
TBPT,,0.00125 ,5.24994
TBPT,,0.0013 ,5.37840
TBPT,,0.00145 ,5.76675
TBPT,,0.0016 ,6.15895
TBPT,,0.0018 ,6.68678

```

```

TBPT,,0.00185 ,6.81949
TBPT,,0.002 ,7.21920
TBPT,,0.0021 ,7.48686
TBPT,,0.00215 ,7.62102
TBPT,,0.0025 ,8.56541
TBPT,,0.0675 ,8.56541
!-----FIM DO MATERIAL 4 -B.A. L4etc-----

!-----MATERIAL 39 -B.A. L39etc-----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,39,,35806.9333 !Módulo de elasticidade MPa....EXCEL
MPDATA,PRXY,39,,0.25 !Poisson

TBDE,MISO,1,,
TB,MISO,39,1,24,0
TBTEMP,0
TBPT,,0.00005 ,1.79035
TBPT,,8.92857E-05 ,3.19705
TBPT,,0.0006 ,3.19705
TBPT,,0.00065 ,3.34523
TBPT,,0.00075 ,3.51581
TBPT,,0.0008 ,3.60327
TBPT,,0.00095 ,3.87257
TBPT,,0.0011 ,4.15016
TBPT,,0.00125 ,4.43411
TBPT,,0.0013 ,4.52994
TBPT,,0.00145 ,4.82039
TBPT,,0.0016 ,5.11469
TBPT,,0.0018 ,5.51198
TBPT,,0.00185 ,5.61206
TBPT,,0.002 ,5.91387
TBPT,,0.0021 ,6.11626
TBPT,,0.00215 ,6.21779
TBPT,,0.0025 ,6.93374
TBPT,,0.0675 ,6.93374
!-----FIM DO MATERIAL 39 -B.A. L39etc-----

!-----MATERIAL 9 -B.A. L9-----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,9,,35105.1778 !Módulo de elasticidade MPa....EXCEL
MPDATA,PRXY,9,,0.25 !Poisson

TBDE,MISO,1,,
TB,MISO,9,1,24,0
TBTEMP,0

```

```

TBPT,,0 ,0.00000
TBPT,,0.00005 ,1.75526
TBPT,,8.92857E-05 ,3.13439
TBPT,,0.00095 ,3.13439
TBPT,,0.0011 ,3.37823
TBPT,,0.00125 ,3.55692
TBPT,,0.0013 ,3.61765
TBPT,,0.00145 ,3.80284
TBPT,,0.0016 ,3.99188
TBPT,,0.0018 ,4.24882
TBPT,,0.00185 ,4.31381
TBPT,,0.002 ,4.51036
TBPT,,0.0021 ,4.64258
TBPT,,0.00215 ,4.70901
TBPT,,0.0025 ,5.17935
TBPT,,0.0675 ,5.17935
!-----FIM DO MATERIAL 9 -B.A. L9-----

```

```

!-----MATERIAL 1 -APENAS BETÃO À COMPRESSÃO-----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,35062.30743!Módulo de elasticidade MPa
MPDATA,PRXY,1,,0.2 !Poisson

TBDE,MISO,1,,,
TB,MISO,1,1,15,0
TBTEMP,0
TBPT,,0.00025 ,8.765576857
TBPT,,0.0005 ,16.47774936
TBPT,,0.00075 ,23.14886209
TBPT,,0.001 ,28.7910675
TBPT,,0.00125 ,33.41632963
TBPT,,0.0015 ,37.03642773
TBPT,,0.00175 ,39.66295987
TBPT,,0.002 ,41.30734633
TBPT,,0.00225 ,41.98083306
TBPT,,0.0025 ,41.98083306
TBPT,,0.00275 ,41.98083306
TBPT,,0.003 ,41.98083306
TBPT,,0.00325 ,41.98083306
TBPT,,0.0035 ,41.98083306

```

```

!----FIM DO MATERIAL 1 -APENAS BETÃO À COMPRESSÃO-----

```

```

FINISH
/PREP7
!*
LESIZE,ALL, , ,1, ,1, , ,1,! Definir numero de elementos por linha =1
!*
ET,1,LINK1    ! LINK180
!*
R,1,.12*.15, ,    ! Definir área de cada secção (m^2)
!*
R,2,2*.12*.12, ,
!*
!-----MESH DAS ESCORAS-----
TYPE,    1    !ID do link element
MAT,      1  !ID das vários materiais
REAL,     2    !ID das várias áreas
ESYS,     0
SECNUM,
!*
FLST,2,22,4,ORDE,22
FITEM,2,1
FITEM,2,2
FITEM,2,3
FITEM,2,7
FITEM,2,8
FITEM,2,11
FITEM,2,12
FITEM,2,14
FITEM,2,15
FITEM,2,16
FITEM,2,17
FITEM,2,18
FITEM,2,19
FITEM,2,20
FITEM,2,22
FITEM,2,23
FITEM,2,25
FITEM,2,27
FITEM,2,29
FITEM,2,33
FITEM,2,35
FITEM,2,42
LMESH,P51X
!-----FIM MESH DAS ESCORAS-----

!-----MESH L37etc-----
TYPE,    1    !ID do link element
MAT,     37  !ID das vários materiais

```

```

REAL,      1      !ID das várias áreas
ESYS,      0
SECNUM,
!*
FLST,2,1,4,ORDE,1
FITEM,2,37
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L37etc-----

!-----MESH L6-----
TYPE,      1      !ID do link element
MAT,       6 !ID das vários materiais
REAL,      1      !ID das várias áreas
ESYS,      0
SECNUM,
!*
FLST,2,1,4,ORDE,1
FITEM,2,6
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L6-----

!-----MESH L5-----
TYPE,      1      !ID do link element
MAT,       5 !ID das vários materiais
REAL,      1      !ID das várias áreas
ESYS,      0
SECNUM,
!*
FLST,2,1,4,ORDE,1
FITEM,2,5
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L5-----

!-----MESH L38-----
TYPE,      1      !ID do link element
MAT,      38 !ID das vários materiais
REAL,      1      !ID das várias áreas
ESYS,      0
SECNUM,
!*
FLST,2,1,4,ORDE,1
FITEM,2,38
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L38-----

!-----MESH L24&36-----

```

```

TYPE, 1 !ID do link element
MAT, 24 !ID das vários materiais
REAL, 1 !ID das várias áreas
ESYS, 0
SECNUM,
!*
FLST,2,3,4,ORDE,3
FITEM,2,24
FITEM,2,4
FITEM,2,36
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L24&36-----

!-----MESH L28&31-----
TYPE, 1 !ID do link element
MAT, 28 !ID das vários materiais
REAL, 1 !ID das várias áreas
ESYS, 0
SECNUM,
!*
FLST,2,2,4,ORDE,2
FITEM,2,28
FITEM,2,31
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L28&31-----

!-----MESH L4etc-----
TYPE, 1 !ID do link element
MAT, 4 !ID das vários materiais
REAL, 1 !ID das várias áreas
ESYS, 0
SECNUM,
!*
FLST,2,3,4,ORDE,3
FITEM,2,10
FITEM,2,40
FITEM,2,41
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L4etc-----

!-----MESH L39-----
TYPE, 1 !ID do link element
MAT, 39 !ID das vários materiais
REAL, 1 !ID das várias áreas
ESYS, 0
SECNUM,

```



```

!*
FLST,2,1,4,ORDE,1
FITEM,2,39
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L39-----

!-----MESH L9-----
TYPE, 1 !ID do link element
MAT, 9 !ID das vários materiais
REAL, 1 !ID das várias áreas
ESYS, 0
SECNUM,
!*
FLST,2,7,4,ORDE,7
FITEM,2,9
FITEM,2,13
FITEM,2,21
FITEM,2,26
FITEM,2,30
FITEM,2,32
FITEM,2,34
LMESH,P51X
!-----FIM MESH L9-----

/SOL !Aplicar força e condições de fronteira
!*
ANTYPE,0 !Análise do tipo estática

FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,4 !Keypoint da força (k6)
!*
/GO
FK,P51X,FX,.5 !valor da força 0.5 (mN)
FLST,2,2,3,ORDE,2 !Apoio em k22,k23 apenas Y
FITEM,2,22
FITEM,2,23
!*
/GO
DK,P51X, , , ,0,UY, , , , ,

FLST,2,2,3,ORDE,2 !apoio em k8,k15 em X e Y
FITEM,2,8
FITEM,2,15
!*
/GO

```

```
DK,P51X, , , ,0,ALL, , , , , ,
```

```
/sol
```

```
!*
```

```
ANTYPE,0
```

```
NSUBST,100,500,10 !Parâmetros da definição da análise não linear
```

```
OUTRES,ERASE
```

```
OUTRES,ALL,ALL
```

```
TIME,1
```